Logika, důkazy, argumentace

Honzík Vaňhara

Každý příklad, který potkáte, každá věta, kterou vidíte, všechno v matematice je postavené na principu exaktního dokazování. Je to přímo základ matematiky, a jako dům musí stát na pevných základech, tak i matematika je potřebuje mít co nejpevnější. Ať se jedná o celou matematiku, anebo váš malý příklad, který řešíte do PraSátka.

Na úvod pár definic

Definice. (Výrok) Výrokem *nazveme každé tvrzení, jemuž lze (v principu) jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu.*

Definice. (Výroková formule) Výrokovou formulí *nazveme výrok závislý na jedné či více proměnných.*

Definice. (Konjunkce) *Jsou dány výroky A, B. Výrok C zní: „A je pravdivý a zároveň B je pravdivý.“. Pak C nazveme* konjunkcí *A a B a značíme $C = A \wedge B$.*

Definice. (Disjunkce) *Jsou dány výroky A, B. Výrok C zní: „A je pravdivý nebo B je pravdivý.“. Pak C nazveme* disjunkcí *A a B a značíme $C = A \vee B$.*

Definice. (Negace) *Nechť V je výrok a výrok W zní: „Neplatí výrok V.“, pak W nazveme* negací *výroku V a značíme $W = V'$.*

Definice. (Kvantifikátory) *Nechť X je množina a V výroková formule. Výrok „Pro každé $x \in X$ platí $V(x)$“ budeme symbolicky zapisovat jako $(\forall x \in X)\colon V(x)$. Výrok „Existuje $x \in X$ takové, že platí $V(x)$“ zapíšeme jako $(\exists x \in X)\colon V(x)$.*

Příklady.

(i) Výrok: Nebe je modré.
(ii) Výroková formule: $n \in \mathbb{N}$ je sudé číslo.
(iii) Konjunkce: Pepa je kluk a 7 je prvočíslo.
(iv) Disjunkce: T. A. Edison vymyslel žárovku nebo Eva s Vaškem vyhráli loni slavíka.
(v) Negace: Není pravda, že 12 je prvočíslo.
(vi) Všechnítko: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x \cdot 0 = 0$.
(vii) Existítko: Existuje aspoň jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n^2 = 1$.

Příklad. Znegujte následující výroky a zamyslete se, zda platí:

(i) Každé prvočíslo je liché.
(ii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x^2 > y$.
(iii) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.

(iv) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.
(v) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\exists c \in \mathbb{R})\colon a + b + c = 0$.
(vi) $(\exists p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{Z})(\forall r \in \mathbb{Z})\colon pqr = 0$.
(vii) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists y \in \mathbb{R})\colon xy = 1$.

Příklad. Přepište následující výroky pomocí kvantifikátorů, znegujte je a rozhodněte, zda platí:

(i) Každé sudé číslo lze zapsat jako součet dvou lichých čísel.
(ii) Kdykoliv jsou x a y dvě různá reálná čísla, pak jedno z nich je větší než druhé.
(iii) Součtem dvou sudých čísel je sudé číslo (můžete použít značení $a \mid b$, které čteme „a dělí b“).
(iv) Každé přirozené číslo lze zapsat jako součet čtyř druhých mocnin celých čísel.
(v) Přirozené číslo může mít libovolný počet dělitelů.

Formální důkazy

Příklad. Dokažte tvrzení $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x > y$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ libovolně. Položme $y := x - 1$. Pak platí $x > x - 1 = y$ a jsme tedy hotovi.

Příklad. Dokažte tvrzení $(\exists p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{Z})(\forall r \in \mathbb{Z})\colon pqr = 0$.

Řešení. Ukážeme, že nula má onu vlastnost. Buď tedy $p = 0 \in \mathbb{Z}$. Dále buď $q \in \mathbb{Z}$ libovolné a $r \in \mathbb{Z}$ libovolné. Pak platí $pqr = 0 \cdot qr = 0$ a důkaz je hotov!

Příklad. U následujících tvrzení rozhodněte, zda platí, a podle toho formálně dokažte buď výrok, nebo jeho negaci.

(i) $(\forall k \text{ sudé})(\exists m, n \text{ liché})\colon k = m + n$.
(ii) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\colon n + m$ je sudé.
(iii) $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})\colon a + b + c = 0$.
(iv) $(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0)(\exists x \in \mathbb{R})\colon xy \neq y^2$.
(v) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\colon x^2 > 3y + x$.
(vi) $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)(\exists z \in \mathbb{R})\colon (z - x)(z - y) < 0$.

Příklad. (Opravdový! I.) Frso se prochází po slovenských lesích, ale bohužel ztratil mapu. Padl už večer a on by chtěl zakempovat někde na louce mimo les. Jenže bez mapy směr nenajde, ale ještě si pamatuje, že les měl plochu $S\,\mathrm{km}^2$ a nemá díry. Dokažte, že Frsovi stačí ujít $2\sqrt{\pi S}$ km, aby se dostal z lesa.

Příklad. (Opravdový! II.) Máme zahradu 4×4 políčka a chceme si na ní vysadit několik stromků. Jenže tuto zahradu nám závidí vandalové a jakmile skončíme vysazování, tak přijdou a vykácí nám všechny stromy ve dvou řádcích a ve dvou sloupcích. Kolik nejméně stromků musíme vysázet, aby nám po nájezdu vandalů aspoň jeden zbyl?

Je to vše?

Poslední, ale nedůležitější částí mého příspěvku je, jak vlastně poznat, že je váš důkaz správný. Časem si na to vyrobíte ten správný čich, ale pro začátek vám dám pár rad:

(1) Všechny objekty (proměnné, body, …), které nejsou zavedeny v zadání, musíte řádně definovat!
(2) Pořádně si projít řešení a hledat, zda u každého výroku neexistuje boční řešení či cesta, kterou jste zapomněli odůvodnit!
(3) To samé platí u každé rovnice či každé proměnné!
(4) Bylo všechno ekvivalentní nebo přípustné pro každý objekt vašeho příkladu?
(5) Není ještě potřeba u něčeho zkouška?

Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Josef Tkadlec: Seminář *Umění vidět v matematice*.