Lineární rekurentní formule

Pavel Podbrdský

Úvod

Určitě jsi se již mnohokrát setkal s tzv. *Fibonacciho posloupností*, tj. posloupností čísel $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$ definovanou vztahy

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Možná Tě někdy napadlo, jestli by z tohoto *rekurentního* předpisu nebylo možné odvodit *explicitní* předpis, tj. nějaký přímý vzoreček pro n-té Fibonacciho číslo. Možné to je, tento vzoreček se nazývá *Binetova formule* a lze ho zapsat např. ve tvaru

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Pokud nevěříš (jak by něco tak „škaredého“ mohlo být celočíselné pro každé n?), zkus si dosadit $n = 0, 1, 2\ldots$ Tento explicitní vzoreček není jen hříčka, můžeme se pomocí něho o posloupnosti $\{f_n\}$ mnoho dozvědět, zejména jak rychle rostou její členy.

Přednáška se bude zabývat metodou, jak takovéto vzorečky v obdobných úlohách odvodit. Ač se na první pohled může zdát, že to celé spadlo z nebe, uvidíme (doufám), že k výsledkům se lze dobrat celkem přirozenou cestou.

Základní pojmy

Úmluva. V celé přednášce se budeme pohybovat v tělese $\mathbb{C}$ komplexních čísel[1]. Kdykoliv v dalším textu budeme mluvit o posloupnosti $\{a_n\}$, budeme rozumět posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (vždy budeme indexovat od nuly) *komplexních* čísel.

Definice. *Lineární rekurentní rovnicí s konstantními koeficienty (dále jen rovnicí) řádu k budeme rozumnět rovnici*

$$a_{n+k} - \zeta_{k-1}a_{n+k-1} - \zeta_{k-2}a_{n+k-2} - \cdots - \zeta_0 a_n = f(n), \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{a_n\}$, koeficienty $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ jsou pevná komplexní čísla a $f(n)$ je nějaká pevná funkce. Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{a_n\}$ splňující rovnici (1) pro $n = 0, 1, 2\ldots$ Počátečními podmínkami pro rovnici

[1] Často jen pro pohodlnost a ucelenost zápisu, rozhodně přednáška nebude vyžadovat nějaké hluboké znalosti komplexních čísel.

(1) *rozumíme předepsání prvních k hodnot, tj. systém vztahů*

$$a_0 = \xi_0, \quad a_1 = \xi_1, \ \dots \ , \quad a_{k-1} = \xi_{k-1}, \tag{2}$$

kde $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ jsou pevná komplexní čísla. Pokud řešení $\{a_n\}$ splňuje vztahy (2)*, říkáme, že vyhovuje počátečním podmínkám. V případě, že $f(n) \equiv 0$, říkáme, že rovnice* (1) *je homogenní; rovnice přejde na tvar*

$$a_{n+k} = \zeta_{k-1} a_{n+k-1} + \zeta_{k-2} a_{n+k-2} + \dots + \zeta_0 a_n. \tag{3}$$

Věta. *Pro každou počáteční podmínku* (2) *existuje právě jedno řešení rovnice* (1).

Homogenní rovnice

Věta. *Nulová posloupnost je vždy řešením rovnice* (3)*. Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ řešení rovnice* (3) *a $c \in \mathbb{C}$, pak i $\{a_n + b_n\}$ a $\{ca_n\}$ jsou řešení rovnice* (3)*. Jinými slovy*[2] *množina M všech řešení rovnice* (3) *je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, jeho dimenze je n.*

Definice. *Charakteristickým polynomem rovnice* (3) *budeme rozumnět polynom*

$$p(x) = x^k - \zeta_{k-1} x^{k-1} - \zeta_{k-2} x^{k-2} - \dots - \zeta_1 x - \zeta_0. \tag{4}$$

Pozorování. Je-li $\lambda \neq 0$ kořen charakteristického polynomu (4), pak posloupnost $\{\lambda^n\}$ je řešením rovnice (3). Je-li $\lambda = 0$ kořen charakteristického polynomu (4), pak posloupnost $(1, 0, 0, 0, \dots)$ je řešením rovnice (3).

Definice. *Má-li charakteristický polynom* (4) *právě k různých (komplexních) kořenů, pak množinu k různých řešení z předchozího pozorování (pro každý kořen máme jedno řešení) nazveme fundamentálním systémem řešení rovnice* (3).

Věta. *V situaci předchozí definice je fundamentální systém řešení rovnice* (3) *bazí množiny M všech řešení rovnice* (3)*. To znamená, že pro každou počáteční podmínku* (2) *lze řešení vyhovující této počáteční podmínce napsat právě jedním způsobem jako lineární kombinaci řešení z fundamentálního systému. Neboli, označíme-li pro krátkost zápisu posloupnosti patřící do fundamentálního systému jako a^1, a^2, ... , a^k, pak pro každou počáteční podmínku* (2) *existuje právě jedna k-tice komplexních čísel α_1, α_2, ... , α_k taková, že řešení vyhovující naší počáteční podmínce má tvar $\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_k a^k$.*

Poznámka. V praktickém příkladu, máme-li řešit rovnici se zadanou počáteční podmínkou, nejprve najdeme posloupnosti z fundamentálního systému a poté interpre-

[2] Pro ty, kteří vědí, co to znamená ...

tujeme počáteční podmínky jako soustavu k lineárních rovnic pro neznáme koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (z předchozí věty). Vyřešením této soustavy nalezneme koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a tím zároveň i explicitní tvar hledaného řešení. Vše si osvětlíme na příkladech.

Tím již máme dobře popsanou situaci v případě, že charakteristický polynom má jednonásobné kořeny. Máme tedy již dostatečné prostředky k tomu, abychom odvodili již zmíněnou Binetovu formuli. Jak ale vyřešit např. rovnici v následujícím příkladu?

Příklad. Najděte všechna řešení rovnice $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

Definice. *Nechť charakteristický polynom* (4) *má kořeny* λ_i, *jejich násobnosti jsou* k_i, $i = 1, 2, \dots, m$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$. *Řešení rovnice* (3) *příslušné kořenu* λ_j *budou řešení tvaru*

$$\{\lambda_j^n\}, \quad \{n\lambda_j^n\}, \quad \{n^2\lambda_j^n\}, \ \dots \ , \quad \{n^{k_j-1}\lambda_j^n\}$$

pro $\lambda_j \neq 0$ *a řešení tvaru*

$$(1, 0, 0, 0, \dots), \quad (0, 1, 0, 0, \dots), \ \dots \ , \quad (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k_j-1}, 1, 0, 0, \dots)$$

pro $\lambda_j = 0$. *Fundamentálním systémem řešení rovnice* (3) *rozumíme množinu všech řešení, které jsou příslušné nějakému kořenu charakteristického polynomu* (4).

Poznámka. Tato definice není v rozporu s definicí pro rovnice jejichž charakteristický polynom má jednonásobné kořeny. Pouze ji rozšiřuje.

Věta. *Fundamentální systém řešení rovnice* (3) *je bazí množiny* M *všech řešení této rovnice. Neboli předchozí věta platí i v případě vícenásobných kořenů charakteristického polynomu.*

Poznámka. Vidíme tedy, že metoda nalezení explicitního tvaru řešení popsaná v poznámce za předchozí větou funguje i v případě vícenásobných kořenů charakteristického polynomu.

Nehomogenní rovnice

Pozorování. Nechť $\{p_n\}$ je jedno (tzv. *partikulární*) řešení rovnice (1). Pak rovnici (1) řeší právě ty posloupnosti $\{b_n\}$, které mají tvar $\{b_n\} = \{p_n + a_n\}$, kde $\{a_n\}$ je řešení rovnice (3).

Pro vyřešení nehomogenní rovnice nám tedy stačí nalézt jedno její řešení (často

ho prostě uhodneme) a poté aplikovat poznatky, které jsme získali o homogenních rovnicích. Nalezení partikulárního řešení se nám v obecnosti nepodaří, nicméně následující věta hovoří o jednom speciálním případu.

Věta. *Nechť funkce $f(n)$ je tzv. kvazipolynom, tj. má tvar*

$$f(n) = \lambda^n P(n),$$

kde $P(n)$ je polynom a λ je nenulové komplexní číslo. Buď $l \in \mathbb{N}_0$ násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu (4) ($l = 0$ značí případ, kdy λ není kořen charakteristického polynomu (4)). Pak rovnice (1) má právě jedno řešení ve tvaru

$$\{p_n\} = \{\lambda^n n^l Q(n)\},$$

kde $Q(n)$ je polynom. Platí $\deg Q(n) = \deg P(n)$.

Poznámka. (pro náročné) Celá teorie lze analogickým způsobem aplikovat na řešení *lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty* (např. rovnice harmonického oscilátoru apod.), to však již není předmětem této přednášky.