Limity

Luboš Dostál

V této přednášce se pokusím příblížit některé partie matematické analýzy, která je jedním z pilířů matematiky. Budu se spíše snažit Vám přiblížit její základy na mnoha příkladech, a proto některé důkazy neuvedu, anebo jen naznačím. Následující seznam je jen informační, některé věci možná do přednášky pozměním ...

Úvod

Definice. *Zobrazení $f \subset M \times N$ je množina uspořádaných dvojic (x, y) taková, že ke každému x existuje právě jedno y takové, že dvojice $(x, y) \in f$. Tj. každý vzor x má právě jeden obraz y, toto y značíme $f(x)$. Místo $f \subset M \times N$ obvykle píšeme $f : M \to N$. Množina $D(f) = M$ se nazývá definiční obor zobrazení f. Množina $\{f(x) | x \in M\} \subset N$ je obor hodnot zobrazení f. Pokud $N \subset \mathbb{R}$, říkáme, že f je funkce, pokud navíc $M \subset \mathbb{R}$, hovoříme o reálné funkci reálné proměnné. V následujícím textu budeme pod pojmem funkce rozumět reálnou funkci reálné proměnné (jinými případy se zabývat nebudeme).*

Definice limity a některé důležité věty

Definice. *Buď f funkce, $\alpha, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě α limitu A, jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

To znamená, že ať si zvolíme libovolně malé kladné epsilon, pak pro x hodně blízká ale různá od α budou hodnoty $f(x)$ hodně blízko A. Tuto skutečnost značíme takto:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = A.$$

Jak je z definice vidět, limita funkce f v bodě a nezávisí na hodnotě $f(a)$.

Definice. *Řekneme, že funkce f má v bodě $\alpha \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$, jestliže*

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

Definice. *Řekneme, že funkce f má v $+\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Poznámka. Podobně se definují ostatní případy.

Dále je vhodné se zmínit o počítání s $\pm\infty$:

Definice.
(1) $+\infty + \alpha = +\infty$ *pro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a pro* $\alpha = +\infty$,
(2) $-\infty + \alpha = -\infty$ *pro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a pro* $\alpha = -\infty$,
(3) $\pm\infty \cdot \alpha = \pm\infty$ *pro* $\alpha > 0$ *a pro* $\alpha = +\infty$,
(4) $\pm\infty \cdot \alpha = \mp\infty$ *pro* $\alpha < 0$ *a pro* $\alpha = -\infty$,
(5) $\alpha / \pm\infty = 0$ *pro* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Výrazy $\pm\infty - \pm\infty$, $\pm\infty \cdot 0$, $\pm\infty / \pm\infty$ *a* $\alpha/0$ **nemají smysl**.

Věta. *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = B$ *(cisla* α, A *a* B *mohou být rovna* $\pm\infty$*). Pak*
(1) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
(2) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
(3) $\lim\limits_{x\to\alpha} (f/g)(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)/g(x)) = A/B$,
pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta. (O limitě složené funkce) *Nechť* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ *a v případě* $A \in \mathbb{R}$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pró* $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq \delta$ *je* $f(x) \neq A$. *Pak* $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = B$.

Věta. („O policajtech“) *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = A$ *a* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *platí pro všechna* $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$. *Potom* $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = A$. *Pokud* $\alpha = \pm\infty$, *budeme chtít, aby nerovnost* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *platila pro všechna* $x > K$, *resp.* $x < K$.

Věta. (Heine) *Řekneme, že posloupnost* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *je vyhovující, pokud* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\alpha_n \neq \alpha$. *Platí, že* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ *existuje právě tehdy, když existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ *pro každou vyhovující posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

A následuje jeden důležitý pojem na závěr:

Definice. *Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Pokud mi na přednášce zbyde trochu času, můžeme si povědět něco i o derivacích.