Limity, derivace a integrály

Tomáš Bárta, Radek Erban

Úvod

Definice. *Zobrazení (též funkce) $f \subset M \times N$ je množina uspořádaných dvojic (x, y) taková, že ke každému x existuje právě jedno y, že dvojice $(x, y) \in f$. Tj. každý vzor x má právě jeden obraz y, toto y značíme $f(x)$. Místo $f \subset M \times N$ obvykle píšeme $f : M \to N$. Množina $D(f) = M$ se nazývá definiční obor zobrazení f. Množina $\{f(x) | x \in M\} \subset N$ je obor hodnot zobrazení f. Pokud $M, N \subset \mathbb{R}$, říkáme, že f je reálná funkce reálné proměnné. V následujícím budeme pod pojmem funkce rozumět reálnou funkci reálné proměnné.*

Definice limity a některé důležité věty

Definice. *Buď f funkce, $a, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a limitu A, jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

To znamená, že ať si zvolíme libovolně malé (kladné) epsilon, pak pro x hodně blízká a, budou hodnoty $f(x)$ hodně blízko A (tak blízko, že $|f(x) - A| < \varepsilon$). Tuto skutečnost značíme takto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Definice. *Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$, jestliže*

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K\,.$$

Definice. *Řekneme, že funkce f má v $+\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Poznámka. Podobně definujeme limitu v bodě $-\infty$ a limitu v bodě a rovnou $-\infty$ a limity v bodech $\pm\infty$ rovné $\pm\infty$.

Dále bude užitečné definovat, jak se počítá s $\pm\infty$:

Definice.

$$+\infty + \alpha = +\infty \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a pro } \alpha = +\infty$$
$$-\infty + \alpha = -\infty \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a pro } \alpha = -\infty$$
$$\pm\infty \cdot \alpha = \pm\infty \text{ pro } \alpha > 0 \text{ a pro } \alpha = +\infty$$
$$\pm\infty \cdot \alpha = \mp\infty \text{ pro } \alpha < 0 \text{ a pro } \alpha = -\infty$$
$$\alpha : \pm\infty = 0 \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}$$

Výrazy $\pm\infty - \pm\infty$, $\pm\infty \cdot 0$ *a* $\alpha : 0$ **nemají smysl**.

Věta. *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Pak*

(1) $\lim\limits_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
(2) $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
(3) $\lim\limits_{x\to a} (f/g)(x) = \lim\limits_{x\to a} (f(x)/g(x)) = A/B$,

pokud výrazy na pravé (i na levé) straně mají smysl. Čísla A, B mohou být klidně rovny i $+\infty$ nebo $-\infty$.

Věta. (O limitě funkce složené) *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ *a existuje $\delta > 0$ takové, že v intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ nenabývá funkce f hodnoty A. Pak* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$.

Věta. (O policajtech) *Nechť $a \in \mathbb{R}$,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ *a $f(x) \le h(x) \le g(x)$ platí pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Potom* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$. *Pokud je $a = \pm\infty$, budeme chtít, aby nerovnost $f(x) \le h(x) \le g(x)$ platila pro všechna $x > K$, resp. $x < K$.*

Věta. (Heine) *Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je vyhovující, jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a $a_n \neq a$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Platí: existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *právě když existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ *pro každou vyhovující posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

A jeden důležitý pojem na závěr:

Definice. *Funkce je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Derivace

Derivace jsou mocným nástrojem pro řešení řady praktických úloh. S jejich pomocí můžeme nalésti maxima, či minima funkcí, zjistit, zda jsou dané funkce rostoucí, či klesající. To jsou úlohy, které v životě objevíme na každém kroku. V ekonomické sféře chceme minimalizovat celkové náklady, nebo maximalizovat zisk. Z přírodních věd přicházejí zase úlohy na hledání minim energie, apod.

Derivace sama o sobě vyjadřuje lokální změnu funkce, což způsobuje, že se s nimi setkáme i při formulaci základních zákonů tohoto světa. S pomocí derivací je můžeme zapsat jako podmínky (rovnice a nerovnice), které splňují příslušné fyzikální veličiny. Zformulovat takové zákony lze již se základními znalostmi o derivacích a mírným fyzikálním nadhledem.

V neposlední řadě je myšlenka derivace v matematice mnohokrát užita a zobecněna, takže si s derivacemi v obecném hávu hrají čistí matematikové dodnes.

A teď trochu konkrétněji. Na začátku máme funkci, říkejme ji třeba f. K této funkci přiřadíme (jistým způsobem) jinou funkci, kterou nazveme derivací funkce f a označíme ji $\frac{df}{dx}$.

Takže derivace nějaké funkce je opět funkcí, aby byla rozumně zadefinovaná, musíme pro každý bod x z jejího definičního oboru předepsat hodnotu $\frac{df}{dx}(x)$. Má to však jisté úskalí, ne každá funkce má svoji derivaci a když už má, tak nemusí být definovaná ve všech bodech definičního oboru funkce f.

Tak a teď definice.

Definice. *Nechť f je funkce zobrazující interval (a, b) do reálných čísel. Nechť $x \in (a, b)$ a nechť existuje limita*

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Pak položíme

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

V uvedené definici se vyskytuje pojem limita, či-li jinak řečeno vyjadřuje symbol $\frac{df}{dx}(x)$ chování podílu $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ pro y blízko k bodu x, což má jednoduchou geometrickou interpretaci a v podstatě tato geometrie byla motivací k zavedení pojmu derivace. To však již bude na přednášce.

K praktickému používání derivací Vám poslouží tyto tabulky, jejichž význam, platnost a způsob užívání si osvětlíme na přednášce.

Derivace základních funkcí

funkce	derivace	v bodech
x	1	pro každé x
x^2	$2x$	pro každé x
x^3	$3x^2$	pro každé x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	pro každé x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	pro každé x
c, c je konstanta	0	pro každé x
x^n, n je přirozené číslo	$n \cdot x^{n-1}$	pro každé x
x^n, n je reálné číslo	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in (0, \infty)$
e^x	e^x	pro každé x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
a^x, a je kladné reálné číslo	$\ln(a) \cdot a^x$	pro každé x

Derivace základních operací

operace	derivace operace
$f + g$	$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
$f \cdot g$	$\frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$
$f - g$	$\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$
$c \cdot f$	$c \cdot \frac{df}{dg}$, c je konstanta

Derivace složené funkce

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Primitivní funkce

Definice. *Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$.*

Poznámka. Pokud funkce F je primitivní k funkci f, pak i $F + c$ je primitivní k f. Pokud F_1 a F_2 jsou dvě primitivní funkce k funkci f, pak existuje číslo c tak, že $F_1 = F_2 + c$, tedy primitivní funkce existuje právě jedna až na konstantu.

Některé primitivní funkce (porovnej s tabulkou derivací):

f	primitivní k f	kde
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$x \in \mathbb{R};\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$x \in \bigcup(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$	$x \in \bigcup(k\pi, (k+1)\pi)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{a})$	$x \in \mathbb{R}$

Newtonův a Riemannův integrál

Definice. *Nechť funkce F je primitivní k funkci f na intervalu (a, b) (může být i neomezený) a existují konečné limity $\lim\limits_{x\to a+} = A$ a $\lim\limits_{x\to b-} = B$. Pak číslo*

$$\int_a^b f(x)dx := B - A$$

nazýváme Newtonovým integrálem funkce f v intervalu (a, b).

Poznámka. Pokud je F definovaná a spojitá (z jedné strany) v bodech a, b, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Definice. *Nechť funkce f je definovaná a omezená na $[a, b]$ (omezeném). Dělení intervalu $[a, b]$ je konečná množina $\{x_0, \ldots, x_n\}$ taková, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Označme $M_i = \sup\{f(x) | \, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ a $m_i = \inf\{f(x) | \, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Horní součet f při dělení D buď*

$$S(f, D) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

a dolní součet

$$s(f, D) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \, .$$

Horní Riemannův integrál je

$$(R^*) \int_a^b f(x)dx := \inf\{S(f, D) | D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a dolní Riemannův integrál je

$$(R_*) \int_a^b f(x)dx := \sup\{s(f, D) | D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\} \, .$$

Pokud se horní a dolní Riemannův integrál rovnají, pak řekneme, že funkce je riemannovsky integrovatelná a společnou hodnotu horního a dolního integrálu nazveme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$. Značíme $(R) \int_a^b f(x)dx$.

Věta. (Základní věta kalkulu) *Nechť funkce f má v omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$ Riemannův i Newtonův integrál, pak*

$$(R) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (N) \int_a^b f(x)dx \, .$$

Některé metody počítání primitivní funkce

1. Metoda „per partes“

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

2. Substituce

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y.$$