Kvantové počítače

Martin Fraas

Úvod

Cieľom každej fyzikálnej teórie je pochopiť javy odohrávajúce sa v našom svete. K tomuto účelu musí mať jazyk v ktorom pracuje. A musí obsahovať zobrazenie, ktoré stavu sveta (sic idealizovaného, teda nemusí popisovať hneď celý svet, ale môže sa uspokojiť s jedným voľným elektrónom) priradí stav v jazyku teórie. Priestor stavov nazývame fázovým priestorom.

Príklad. (popis futbalovej lopty.) Predstavme si futbalovú loptu padajúcu na zem. Klasická Newtonova mechanika tvrdí, že k jej popisu potrebujeme 3 súradnice a 3 hybnosti. Teda stav lopty v Newtonovej mechanike je popísaný 6-ticou reálnych čísel. Prvé tri určujú polohu a druhé tri hybnosť lopty. Fázový priestor lopty je teda množina 6-tíc reálnych čísel ($\mathbb{R}^6$).

Pre zoznámenie sa s kvantovou teóriou je fázový priestor z predchádzajúceho príkladu zbytočne veľký, preto sa budeme zaoberať najmenším netriviálnym fázovým priestorom ktorý bude mať iba dva prvky. Môže to byť pravdivostná hodnota výroku, v tom prípade ich označíme 0 a 1, alebo polarizácia svetla, tú môžeme označovať Ľ a P, či jednoducho keď si našu loptu roztočíme okolo osi z, môžeme šípkou doľava označiť ak sa točí v smere hodinových ručičiek a šípkou doprava ak sa točí proti smeru hodinových ručičiek. Všetky tri spomenuté systémy a mnohé ďalšie môžeme klasicky opísať jedným bitom. Ako je to v kvantovej teórii?

Úvod do kvantového sveta

Kvantová teória učí, že ak sa systém môže nachádzať v stave $|0>$ aj v stave $|1>$, potom sa môže nacházdať aj v stave $a|0> + b|1>$, kde a a b sú ľubovoľné komplexné čísla. Teda na kvantový popis týchto systémov si s jedným bitom určite nevystačíme. Ešte predtým než upresníme koľko parametrov je potrebných na popis v kvantovej teórii, venujme sa problému merania. Naše teórie totiž nemajú za cieľ iba popísať svet, ale hlavne predpovedať výsledky našich pozorovaní. V klasickej teórii je meranie tak intuitívnym pojmom, že nás ani nenapadne sa ním zaoberať. Vráťme sa k príkladu s loptou.

Príklad. (Pozorovanie futbalovej lopty) Nech naša futbalová lopta je v stave $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = -1$. Čertík chce zistiť ako vysoko je nad zemou.

Každý kto sa nestratil v spleti 6-tíc mu povie, že keď sa na ňu pozrie, zistí, že je meter nad povrchom. Triviálne.

Majme teraz, ale pravdivostný výrok v stave $a|0> +b|1>$. Čertík chce zistiť či je pravdivý. Aký bude výsledok jeho bádania? Kvantová teória má pravdepodobnostný charakter a tvrdí, že čertík zistí s pravdepodobnosťou $\frac{a^2}{a^2+b^2}$, že je nepravdivý a s pravdepodobnosťou $\frac{b^2}{a^2+b^2}$, že je pravdivý. Ďalej tvrdí, že ak sme raz na systéme namerali 0 (teda čertík zistil, že výrok je klamstvo) musíme ju namerať aj pri opakovanom meraní a teda systém musel prejsť do stavu $|0>$. Nazývame to kolaps vlnovej funkcie a vidíme ďalší veľký rozdiel klasického a kvantového sveta. Pozorovaním lopty sme jej stav neovplyvnili, zatiaľ čo v kvantovom svete sa pozorovaním stav systému zmenil.

Ak sa ešte raz pozrieme na pravdepodobnosti merania, zistíme, že pre $c \neq 0$ nie sú stavy $\frac{a}{c}|0> +\frac{b}{c}|1>$ odlíšiteľné. Môžeme teda položiť $c = a^2 + b^2$, čím dostaneme normované stavy. Tieto môžeme geometricky reprezentovať v rovine, jednotkovou šípkou v smere (a, b). Potom pravdepodobnosť namerania 0 resp. 1 je daná kvadrátom veľkosti priemetu tejto šípky na x-ovú resp. y-ovú os. V analógii s klasickou mechanikou nazývame tento stav q-bitom.

Zatiaľ sme písali, že namerať môžeme iba hodnotu 0 odpovedajúcu stavu $|0>$, resp. 1 stavu $|1>$. Znamená to, že po meraní sa systém nemôže nachádzať v stave $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0> +|1>)$? Nie, iba musíme zmeniť meranie opýtať sa systém na inú otázku.[1] Musíme sa ho opýtať, či je v stave $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0> +|1>)$? V geometrickom modeli túto otázku ľahko reprezentujeme. Stačí otočiť osi o $45°$. Ak máme stav (a, b) pravdepodobnosť namerania 0 a kolapsu do stavu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0> +|1>)$ je $|\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|^2$ a namerania 1 s následným kolapsom do stavu $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|0> +|1>)$ je $|\frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b)|^2$. Zavádzame pojem merania voči bázi , ktorého zmysel je z predchádzajúceho jasný.

Príklad. (Spin) Popíšeme fázový priestor spinu. Pre fyziku je spin kanonickým q-bitom. Fázový priestor spinu tvoria vektory tvaru $a|\uparrow> +b|\downarrow>$, kde $a^2 + b^2 = 1$. Ket $|\uparrow>$ odpovedá nameraniu priemetu spinu do z-tovej osi rovnému $\frac{1}{2}$ a ket $|\downarrow>$ priemetu $-\frac{1}{2}$. Definujme ďalej kety $|\rightarrow>\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> +|\downarrow>)$ a $|\leftarrow>\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> -|\downarrow>)$, kde opäť $|\rightarrow>$ odpovedá nameraniu priemetu spinu do y-novej osi rovnému $\frac{1}{2}$ a $|\leftarrow>$ priemetu $-\frac{1}{2}$. Tieto rôzne báze nazývame polarizácie a hovoríme o spine polarizovanom v horno-dolnom smere, či o meraní voči ľavo-pravej polarizácii.

Nemôžeme naraz poznať odpovede na obidve otázky, teda poznať naraz priemet spinu na z-tovú i y-novú os. Hovoríme, že veličiny nie sú kompatibilné. Najznámej-

[1] Klasicky si to môžeme najlepšie predstaviť na vyššie spomínanej roztočenej lopte, ak budeme merať jej rotáciu okolo nezetovej osi.

ším príkladom sú x a p zviazané Heisenbergovými reláciami neurčitosti $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, podobnú nerovnosť môžeme odvodiť aj pre merania voči bázi $|\uparrow>$, $|\downarrow>$ resp. $|\rightarrow>$, $|\leftarrow>$.

Ilustrujeme si napísané princípy na malom príklade.

Príklad. Označme stav Dinovej mysle „mám doTEXované“ ako $|$`:-)` $>$ a stav „ešte TEXujem“ ako $|$`:-(` $>$. Samozrejme momentálne je v stave $|$`:-(` $>$. Anša ho chce zmiasť a preto nameria stav jeho mysle voči bázi otočenej o 45°, teda

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\,\texttt{:-)}> \;+\; |\,\texttt{:-(}>) \;\equiv\; |1>, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\,\texttt{:-)}> \;-\; |\,\texttt{:-(}>\,) \;\equiv\; |2>.$$

Stav Dinovej mysle prejde s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ do stavu $|1>$ a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ do stavu $|2>$. Keď sa ho následne Martin s dobrým umýslom opýta či už doTEXoval zborníček? Odpovie mu Dino s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ áno a naozaj si to bude myslieť až do doby kým si ho tesne pred tlačou nebude chcieť ešte raz skontrolovať.

Everettovská formulácia

Sformulujme teraz na základe predchádzajúceho 2 axiómy kvantovej mechaniky. Použijeme Everettovskú formuláciu (1952). Pre jednoduchosť ich sformulujeme iba pre spinové systémy. Základom je spolu so systémom vždy popisovať aj celý svet. Teda bázové stavy sú $|Svet:0>$, $|Svet:1>$.

Axióm. (1.) *Stav systému je paprskem ve vektorovém prostoru. V našom prípade je vektorovým priestorom rovina.*

Axióm. (2.) *Meraním na systéme môžeme obdržať iba hodnoty* 0 *alebo* 1. *Po meraní na stave* (a, b) *vzniknú dva paralerné vesmíri. Jeden v ktorom bude nameraná hodnota* 0, *druhý v ktorom bude nameraná hodnota* 1. *Budeme to značiť*

$$a|Svet:0> + b|Svet:1> \rightsquigarrow \left\langle \begin{array}{l} a^2|Svet:0> \\ \\ b^2|Svet:1>, \end{array}\right.$$

pričom a^2, b^2 *značia váhy pravdepodobnosti sveta* 0, *resp. sveta* 1 – *teda pravdepodobnosť danej vetvy vývoja vesmíru.*

Príklad. Predstavme si, že nezisťujeme v ktorej vetve vývoja sme sa ocitli. Aký je rozdiel medzi stavmi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> + |\downarrow>) \quad \text{a} \quad \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2}|\uparrow> \\ \\ \frac{1}{2}|\downarrow> \end{array}\right. \quad ?$$

Meraním v dolno-hornej polarizácii rozdiel nezistíme. Aká je ale pravdepodobnosť namerania priemetu $\frac{1}{2}$ do osy y?

V prvom prípade je to 1 (stav je priamo rovný $| \rightarrow >$), hovoríme, že dochádza k interferencii. V druhom prípade je to $\frac{1}{2}$, k interferencii nedochádza.

Pozrime sa ešte ako vznikajú prvé stavy a ako druhé? Uvažujme dve šterbiny A, B a fotón ktorý na ne nalietava, takže má na výber ktorou preletí. Ak nebudeme zisťovať ktorou šterbinou letí, dostane sa do stavu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|A> + |B>).$$

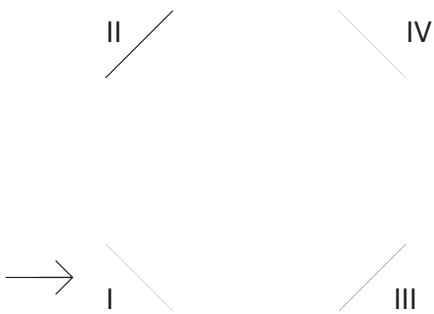
Ak do jednej z šterbín umiestnime detektor, ktorý bude registrovať prielet častice dostane sa do stavu

$$\left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2}|A> \\ \\ \frac{1}{2}|B> . \end{array} \right.$$

Povedané inými slovami, prvý druh stavov vzniká ak dve rôzne cesty nie sú principiálne rozlíšiteľné. A stavy druhého druhu iba keď my vedome nechceme dve cesty rozlišovať, napriek tomu, že je to principiálne možné.

Mach-Zehnderov interferometer

Mach-Zehnderov interferometer je jednoduchá sústava zrkadiel zobrazená na obrázku.



Do polopriepustného zrkadla I vyšleme fotón. Ten s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ zamieri k zrkadlu II a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ k zrkadlu III, od nich sa odrazí k polopriepustnému zrkadlu IV, ktoré ho s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ pošle hore a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ doprava. Tento výsledok očakávame sedliackym rozumom. Aký výsledok predpovedá QM? Kým sa k nemu dopracujeme musíme prekonať jednu prekážku. Až doteraz sme nikdy neriešili dynamiku, teda časový vývoj systému, musíme povedať ako sa zmení stav fotónu po odraze od zrkadla.

Časový vývoj

Pre pochopenie odrazu od zrkadla, budeme potrebovať dva postuláty.

I. Ak sa stav $|a>$ vyvynie na stav $|a'>$ a stav $|b>$ na $|b'>$, potom stav $|a>+|b>$ sa vyvynie na $|a'>+|b'>$. Tento predpoklad je veľmi prirodzený, rešpektovanie princípu superpozície je prestupuje celou QM.

II. Stavy $|a>$ a $|a'>$ musia mať rovnakú veľkosť. Odborne tento predpoklad nazývame unitaritou časového vývoja a pri blyžšom rozbore by sme zistili, že nemôže ovplyvniť výsledky merania, ktoré na veľkosti nezávisia.

Pre polopriepustné zrkadlo ešte okrem týchto dvoch axiómov požadujeme aby s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ fotón prepustilo a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ ho odrazilo. Označíme fotón letiaci vpravo ketom $|\rightarrow>$, fotón letiaci hore ketom $|\uparrow>$ a zvolíme obecný vývoj

$$|\uparrow> \rightsquigarrow a|\uparrow> + b|\rightarrow>$$

$$|\rightarrow> \rightsquigarrow c|\uparrow> + d|\rightarrow>$$

Využitím stanovených podmienok nájdeme riešenie

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Podmienky neurčujú riešenie jednoznačne, vybrali sme to ktoré skutočne odpovedá odrazu od zrkadla, ktorého plné pochopenie je mimo možností tejto prednášky. Každopádne výsledky nižšie prevádzaných úvah na tomto výbere nezávisia a boli by rovnaké aj pre iné a, b, c, d spĺňajúce zadané podmienky.

Pre odraz od obyčajného zrkadla prirodzene položíme

$$a = d = 0,\ b = c = i.$$

Po tejto príprave môžeme preskúmať činnosť Mach-Zehnderovho interferometra. Nech do zrkadla I. vstupuje zľava fotón, teda je v stave $|\rightarrow>$. Po priechode polopriepustným zrkadlom bude v stave $\frac{1}{\sqrt{2}}(i|\uparrow> + |\rightarrow>)$, následne sa v obidvoch vetvách odrazí a prejde do stavu $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|\rightarrow> + i|\uparrow>)$. A konečne priechodom polopriepustným zrkadlom IV. sa dostane do stavu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow> + i|\uparrow>) + i\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> + i|\rightarrow>)\right) = -|\rightarrow> .$$

Teda v skutočnosti fotón vyletí vždy smerom ktorým vlietal. Hľa, interferencia.

Kvantová bomba

Nasledujúca úloha je jedna z najjednoduchších na ktorých sa dá demonštrovať nečakané možnosti kvantového sveta. Prvý krát bola publikovaná v Foundations of Physics z roku 1993, takže sa jedná o relatívne mladý výsledok.

Problém je nasledujúci: V muničnom sklade je uchované veľké množstvo bômb, z ktorých polovička je nefunkčná. Našou úlohou je vybrať aspoň jednu funkčnú bombu. Pričom jediná možnosť ako zistiť, či je bomba funkčná je aktivovať ju. Zdanlivo neriešiteľné, ale našťastie náš svet sa riadi inými zákonmi než aké sa nám zdajú prirodzené.

Umiestnime do ľavého horného rohu interferometra citlivé zariadenie, tak aby odraz fotónu od zrkadla II. aktivoval bombu. Ak je bomba nefunkčná, tak na výsledku merania zrejme nič nezmení. Ale ak je funkčná, tak horná a dolná cesta sú odrazu rozlíšiteľné, pozrime sa ako dopadne experiment v tomto prípade. Začneme znova s fotónom letiacim zprava. Použijeme 2.axióm a priechod interferometrom môžeme zaznamenať ako:

$$|\rightarrow\rangle \rightsquigarrow \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2}|\uparrow\rangle \ \mathrm{X} \\ \frac{1}{2}|\rightarrow\rangle \rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(i|\uparrow\rangle - |\rightarrow\rangle) \end{array} \right.$$

V hornej vetve bomba vybuchne a je po experimente. Ale v dolnej vetve už nedochádza k interferencii, fotón môže vyletieť smerom hore, čo neklamne indikuje, že bomba je dobrá, napriek tomu, že nebola zaktivovaná.

Definícia. (Stav systému) *Systém je dezorientován*

Literatúra

Jiří Formánek – Úvod do kvantové teorie Academia / Praha 1983