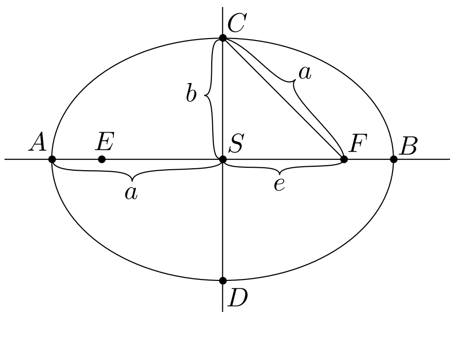
Kuželosečky

David Hruška

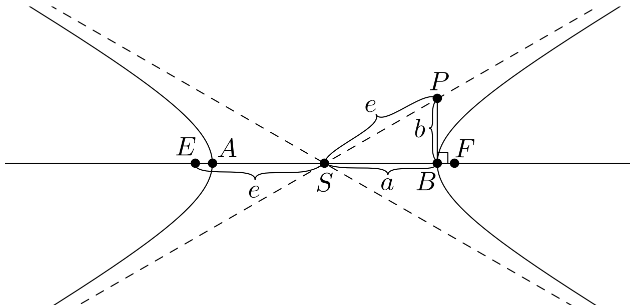
Abstrakt. Příspěvěk obsahuje tři ekvivalentní definice kuželoseček a jejich základní vlastnosti. Hlavní část je věnována syntetickému přístupu, který není rozšířený, ale je elementární a s použitím některých výsledků klasické planimetrie rychle vede k pokročilým vlastnostem kuželoseček.

Rovinné definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností $2a$ pro nějaké $a > 0$. Elipsa je zřejmě souměrná podle přímky EF a podle kolmice na ni vedené středem úsečky EF. Těmto přímkám říkáme *hlavní* a *vedlejší* poloosa. Elipsa protíná svoji hlavní poloosu v bodech vzdálených $2a$. *Velikostí hlavní poloosy* myslíme polovinu této vzdálenosti, tedy a, analogicky pro vedlejší poloosu.



Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností $2a$, kde $2a < |EF| = 2e$.



Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají od pevně dané řídicí přímky d a ohniska F ($F \notin d$) stejnou vzdálenost. Vzdálenost $p = |Fd|$ se nazývá *parametr*. *Kružnici* lze považovat za speciální případ elipsy – pokud ohniska E, F splynou.

Poznámka. V obrázcích můžete vidět i další standardní parametr elipsy – tzv. *excentricitu*, kterou značíme e. My ji ale nebudeme potřebovat, čili se s ní ani nebudeme zdržovat.

Cvičení. Určete množinu středů všech kružnic dotýkajících se současně dvou daných kružnic, pokud tyto

(i) leží vně sebe,
(ii) jedna leží uvnitř druhé.

Přestože budeme pracovat s kuželosečkami výhradně synteticky, krátce si shrneme jejich souvislost s algebraickými křivkami.

Algebraická definice

Definice. *Křivkou druhého stupně* rozumíme množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňující rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \tag{1}$$

kde koeficienty jsou reálná čísla.

Lze ukázat, že pokud levá strana není součinem dvou lineárních výrazů a rovnici (1) vyhovuje více než jeden bod, pak ji lze vhodnou transformací souřadnic převést na jeden z tvarů

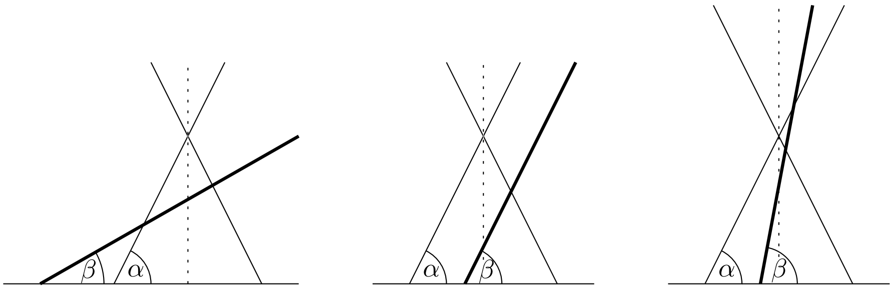
(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$ popisuje elipsu s délkami poloos a, b a ohnisky v bodech $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$,

(ii) $y^2 = 2px,\ p > 0$ popisuje parabolu s ohniskem v bodě $(p/2, 0)$ a řídicí přímkou danou rovnicí $x = -p/2$,

(iii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$ popisuje hyperbolu s ohnisky v bodech $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Kuželová definice

V tomto oddílu zkusíme zjistit, proč se našim oblíbeným křivkám říká právě kuželosečky. Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, obdržíme vždy elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Typ kuželosečky závisí na úhlu, pod kterým rovina kuželovou plochu protíná. Označme α úhel, který svírají povrchové přímky s rovinou kolmou na osu kuželové plochy, a β úhel řezné roviny a roviny kolmé na osu kuželové plochy (viz obrázek).



(i) (ii) (iii)

Uvažme první případ, čili $\alpha > \beta$. Do obou částí spodního kuželu vepíšeme sféry a body jejich dotyku s řeznou rovinou označme sugestivně F_1 a F_2. Příslušný řez kuželové plochy je potom elipsa s ohnisky F_1 a F_2. Toto tvrzení si na přednášce dokážeme.

Cvičení. Dokažte analogická tvrzení pro hyperbolu (analogické) a parabolu (mírně odlišné; uvažte navíc rovinu obsahující dotykovou kružnici).

Cvičení. Rozmyslete si, že degenerované případy průniku řezné roviny a kuželové plochy odpovídají těm zmíněným u algebraické definice.

Cvičení. Popište rovinný řez válcové plochy.

Geometrické vlastnosti

Následující tvrzení ukazuje možná nejzajímavější vlastnost kuželoseček, se kterou se člověk může potkat i v praxi[1] a dá se použít jako základ pro syntetický přístup ke kuželosečkám.

Úmluva. Ohniska elipsy a hyperboly budeme značit F_1 a F_2.

Věta. (The optical property)

(1) *Tečna k elipse, která se jí dotýká v bodě P, je osou* **vnějšího** *úhlu F_1PF_2.*

[1] Viz např. (eliptické) šeptající galerie, parabolické antény, reflektory, dalekohledy…

(2) *Tečna k hyperbole, která se jí dotýká v bodě P, je osou* **vnitřního** *úhlu F_1PF_2.*
(3) *Tečna k parabole, která se jí dotýká v bodě P, je osou úhlu F_1PP', kde P' je projekce P na řídicí přímku.*

Poznámka. Jak už jsme si mohli několikrát všimnout, elipsa a hyperbola mají mnoho podobných (v jistém smyslu spíše opačných) vlastností. Naproti tomu parabolu můžeme vnímat jako extrémní případ mezi nimi, nejlépe jako „elipsu s jedním ohniskem v nekonečnu". S touto analogií je třeba zacházet opatrně, ale například na předchozí větě funguje dobře.

Pro elegantní důkaz věty pro elipsu a hyperbolu je užitečné řešení následující úlohy.

Cvičení. Je dána přímka p a body A, B mimo ni. Nalezněte na p bod P minimalizující součet, resp. maximalizující rozdíl jeho vzdáleností od bodů A a B.

Nyní už se můžeme vrhnout na pořádnou geometrii!

Tvrzení. *Průsečík tečen k elipse vedených krajními body P, Q její tětivy obsahující ohnisko F_1 je střed kružnice připsané trojúhelníku F_2PQ příslušející straně PQ. Navíc F_1 je bod dotyku této kružnice a strany PQ.*

Tvrzení. *Nechť P je průsečík tečen k elipse dotýkajících se jí v bodech X a Y. Pak platí $\sphericalangle XF_1P = \sphericalangle YF_1P$.*

Úlohy o elipse

Úloha 1. Dokažte, že množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.

Úloha 2. Daným bodem veďte tečny k elipse. Rozlište případy, kdy bod leží na elipse a mimo ni.

Úloha 3. Popište množinu středů tětiv elipsy daného směru.

Úloha 4. Pomocí pravítka a kružítka zkonstruujte ohniska dané elipsy a.

Úloha 5. Do $2n$-úhelníku je vepsána elipsa. Obarvěme strany mnohoúhelníku střídavě bíle a černě. Dokažte, že součet úhlů, pod kterými jsou z ohniska vidět bílé strany, je roven $180°$.

Úlohy o parabole

Úloha 6. Daným bodem veďte tečny k parabole (je dáno ohnisko a řídicí přímka). Rozlište případy, kdy bod leží na parabole a mimo ni.

Úloha 7. Urči množinu bodů, které mají od přímky q a bodu M stálý součet vzdáleností.

Následující úlohy je vhodné řešit v uvedeném pořadí.

Úloha 8. Dokažte, že obraz ohniska v osové souměrnosti podle tečny leží na řídicí přímce.

Úloha 9. Z bodu P jsou vedeny tečny k parabole dotýkající se jí v bodech X a Y. Jejich kolmé projekce na řídicí přímku označme X' a Y'. Dokažte, že P je opsiště trojúhelníku $FX'Y'$.

Úloha 10. Dokažte, že množina bodů, z kterých je parabola vidět pod pravým úhlem, je řídicí přímka. Navíc pro P na řídicí přímce je PF výška v trojúhelníku XPY, kde X a Y jsou body dotyku tečen z P.

Úloha 11. Dokažte, že ohnisko paraboly připsané trojúhelníku leží na jeho kružnici opsané.

Bonus. S využitím vlastností Simsonovy přímky dokažte

Tvrzení 12. *Řídicí přímka paraboly připsané trojúhelníku prochází jeho průsečíkem výšek.*

Úloha 13. Je dána parabola a její tečna t dotýkající se jí v bodě P. Dokažte, že průsečík kolmice na t procházející P s osou paraboly se nachází v konstantní vzdálenosti od projekce P na osu paraboly nezávisle na poloze bodu P.

Úloha 14. Jsou dány dvě různoběžné přímky a na každé z nich bod pohybující se po ní konstantní (ne nutně navzájem stejnou) rychlostí tak, že průsečíkem přímek neprojdou oba body najednou. Dokažte, že jejich spojnice během pohybu zůstává tečnou k pevné parabole.

Návody

1. Využijte Větu.

2. Pro bod na elipse použijte Větu, pro bod mimo vhodně přeneste celou délku $2a$ na polopřímku F_1T, kde T je hledaný bod dotyku.

3. Využijte toho, že elipsa je rovnoběžnou projekcí kružnice.

4. Využijte předchozí úlohu pro nalezení středu elipsy. Pak sestrojte hlavní a vedlejší poloosu. Využijte symetrie elipsy.

5. Využijte druhého Tvrzení.

6. Pomocí Věty najděte projekci bodu dotyku na řídicí přímku.

7. Vhodně posuňte q.

8. Využijte Větu.

9. Tečny jsou osy stran.

10. Využijte úlohu 8.

11. Využijte úlohu 8 a Simsonovu přímku.

13. Najděte podobné trojúhelníky.

14. Definujte parabolu třemi tečnami (dvě už máte) a využijte úlohu 10.

Literatura a zdroje

[1] A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky *Geometry of Conics*, AMS, 2007.
[2] Alča Skálová *Kuželosečky*, Mentaurov, 2013.