Kuželosečky

ALČA SKÁLOVÁ

„Klasické“ definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, majících od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností $2a$, kde $2a > |EF| = 2e$.

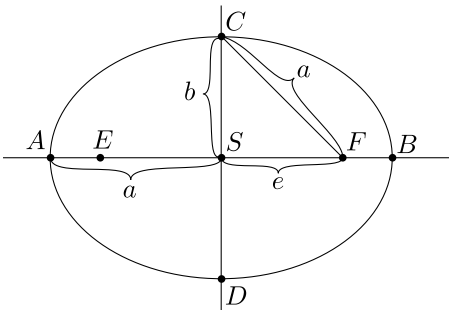
Parabola je množina všech bodů v rovině, majících od pevně dané řídicí přímky d a ohniska F ($F \notin d$) stejnou vzdálenost. Vzdálenost $p = |Fd|$ se nazývá *parametr*.

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, majících od dvou pevně daných různých bodů E, F (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností $2a$, kde $2a > |EF| = 2e$.

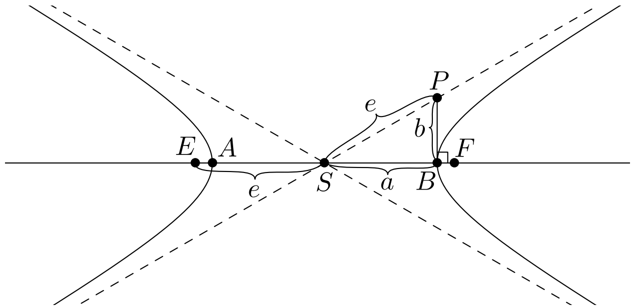
Kružnici lze považovat za speciální případ elipsy – pokud ohniska E, F splynou do jednoho bodu.

Základní vlastnosti

V případě elipsy nazýváme *délkou hlavní poloosy* vzdálenost $a = |AS|$, *délkou vedlejší poloosy* vzdálenost $b = |CS|$, *excentricitou* vzdálenost $e = |FS|$. Platí $a^2 = b^2 + e^2$.



V případě hyperboly nazýváme *délkou hlavní poloosy* vzdálenost $a = |BS|$, *excentricitou* vzdálenost $e = |ES|$. Kolmice z hlavního vrcholu B protne asymptotu v bodě P (viz obrázek). Označíme-li $b = |PB|$, platí jednak $e = |SP|$, jednak $e^2 = a^2 + b^2$.



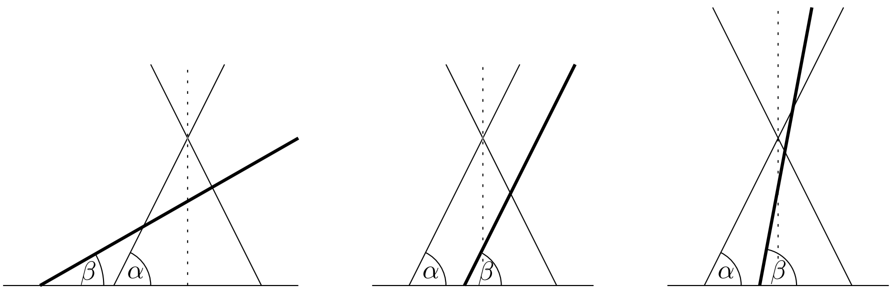
Osová afinita

Pravoúhlá osová afinita v rovině je zobrazení určené přímkou o (osou) a poměrem $k > 0$. Obrazem bodu $X \notin o$ je bod X' v polorovině oX, pro který je $|X'o| = k|Xo|$. Body osy o jsou samodružné.[1]

Obrazem kružnice v pravoúhlé osové afinitě je elipsa.

Kuželosečky jako řezy na kuželové ploše

Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, obdržíme vždy elipsu, parabolu nebo hyperbolu. Typ kuželosečky závisí na úhlu, pod kterým rovina kuželovou plochu protíná. Označme α úhel, který svírají površky (povrchové přímky) s rovinou kolmou na osu kuželové plochy, a β úhel řezné roviny a roviny kolmé na osu kuželové plochy (viz obrázek).



(i) (ii) (iii)

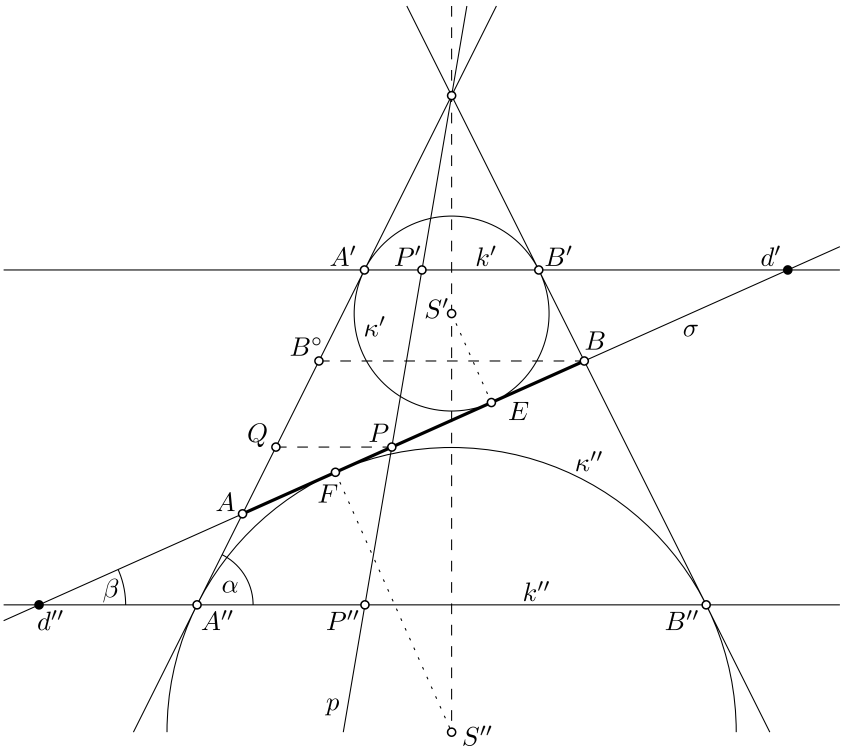
V případě

(i) $\alpha > \beta$ je řezem *elipsa*,
(ii) $\alpha = \beta$ je řezem *parabola*,
(iii) $\alpha < \beta$ je řezem *hyperbola*.

[1]Samodružný bod je takový, který se zobrazí sám na sebe.

Ohniska E a F, popřípadě ohnisko F paraboly, jsou body dotyku kulových ploch κ' a κ'' vepsaných kuželové ploše, které se zároveň dotýkají řezné roviny σ.

Předchozím tvrzením se souhrnně říká Quételetova-Dandelinova věta. Pro její důkaz (část o elipse) na přednášce nám bude nápomocen následující obrázek.



Řídicí přímka kuželosečky

V „klasické“ definici kuželoseček je určitá nejednotnost – v případě elipsy a hyperboly zkoumáme vzdálenost od dvou bodů, kdežto v případě paraboly nás zajímá vzdálenost od bodu a přímky. Pokusme se tuto nejednotnost odstranit a definovat všechny tři kuželosečky stejným způsobem, a to pomocí vzdálenosti od dané *řídicí přímky* d a *ohniska* F ($F \notin d$). Nutno podotknout, že kružnici tímto způsobem definovat nelze.

Množina všech bodů X v rovině, které mají stejný poměr vzdálenosti k ($k > 0$) od řídicí přímky d a od bodu F (tedy $k|Xd| = |XF|$), je

(i) elipsa, pro $k < 1$ (z řeckého *élleipsis* = vynechání, proto je také v lingvistice elipsou míněna výpustka),

(ii) parabola, pro $k = 1$ (přirovnání),
(iii) hyperbola, pro $k > 1$ (nadsázka).

Vlastnosti tečen a ohniskové vlastnosti

Průvodiče bodu M (což jsou spojnice M a ohnisek) elipsy/hyperboly dělí rovinu na dvě dvojice vrcholových úhlů. V případě elipsy nazýváme *vnějšími úhly průvodičů* dvojici úhlů **ne**obsahující její střed, zatímco v případě hyperboly naopak dvojici obsahující její střed.

V případě paraboly nazýváme průvodiči jejího bodu M dvojici přímek, z nichž jedna je spojnice M a ohniska F a druhá je kolmá na řídicí přímku d a prochází M. Vnějšími úhly průvodičů bodu M paraboly nazýváme ty dva vrcholové úhly, z nichž jeden obsahuje vrchol paraboly.

Věta 1. *Tečna elipsy/paraboly/hyperboly půlí vnější úhly průvodičů bodu dotyku.*

Věta 2. *Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.*

Věta 3. *Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy o poloměru a.*

Věta 4. *Množina bodů souměrných s jedním ohniskem hyperboly podle všech tečen leží na kružnici se středem ve druhém ohnisku o poloměru $2a$.*

Věta 5. *Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na kružnici se středem ve středu hyperboly o poloměru a.*

Věta 6. *Úsek tečny omezený asymptotami hyperboly je půlen bodem dotyku.*

Věta 7. *Tečna hyperboly spolu s asymptotami určuje trojúhelník, který má konstantní obsah.*

Věta 8. *Množina bodů souměrných s ohniskem paraboly podle všech tečen je řídicí přímka d.*

Věta 9. *Množina pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna v.*

Příklady

Je-li v příkladech dána elipsa, hyperbola či parabola bez bližšího upřesnění, myslí se tím, že známe její hlavní vrcholy a ohniska, resp. ohnisko a vrchol. Jedinou výjimkou je příklad 14, ve kterém je dána „pouze“ množina bodů z definice elipsy (tedy speciálně neznáme ani hlavní ani vedlejší vrcholy).

Příklad 1. Dokaž, že uvedené definice kuželoseček jsou vskutku ekvivalentní.

Příklad 2. Dokaž, že řezem rotační válcové plochy a roviny, která není rovnoběžná s osou oné válcové plochy, je elipsa.

Příklad 3. Je dána kružnice k a vně pevný bod M. Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají k a procházejí M.

Příklad 4. Urči množinu bodů, které mají od přímky q a bodu M stálý součet vzdáleností.

Příklad 5. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k a l tak, že l je uvnitř k. Urči množinu středů všech kružnic, které mají vnitřní dotyk s k a vnější dotyk s l.

Příklad 6. Je dána kružnice k a přímka p, která ji neprotíná. Urči množinu středů všech kružnic, které se dotýkají k a p (přičemž s k mají vnější dotyk).

Elipsa

Příklad 7. Zkonstruuj tečny k elipse daným bodem.

Příklad 8. Sestroj elipsu, je-li dáno:

(i) hlavní vrchol A, vedlejší vrchol C, délka hlavní poloosy a,
(ii) hlavní vrcholy A a B, bod elipsy M,
(iii) hlavní vrcholy A, B a tečna t.

Příklad 9. Do trojúhelníku PQR vepiš elipsu tak, aby daný bod F byl jejím ohniskem.

Příklad 10. Jsou dány dvě elipsy sdílející ohnisko. Dokaž, že v takovém případě mají nejvýše dva společné body.

Příklad 11. Sestroj průsečíky přímky p a elipsy zadané hlavními vrcholy A, B a vedlejším vrcholem C.

Příklad 12. Zkonstruuj tečny k elipse daným směrem.

Příklad 13. Dokaž, že součin vzdáleností ohnisek elipsy od tečny je konstantní (pro každou tečnu).

Příklad 14. Zkonstruuj ohniska elipsy pomocí pravítka a kružítka.

Hyperbola

Příklad 15. Z daného bodu veď tečny k hyperbole.

Příklad 16. Sestroj hyperbolu, je-li dáno:

(i) ohnisko F, asymptota m, směr s druhé asymptoty,
(ii) ohniska E, F, tečna t,
(iii) ohnisko F, tečna t_1 s bodem dotyku T a další tečna t_2,
(iv) ohnisko F, asymptota m, délka hlavní poloosy a.

Příklad 17. Sestroj rovnoosou[2] hyperbolu, je-li dán střed S, tečna t, délka hlavní poloosy a.

Parabola

Příklad 18. Daným bodem veď tečny k parabole.

Příklad 19. Sestroj parabolu, je-li dáno:

(i) osa o, bod paraboly M a parametr p,
(ii) osa o, ohnisko F a tečna t,
(iii) ohnisko F, tečny t_1, t_2.

Příklad 20. Z bodu P na řídicí přímce d veď tečny k parabole. Dokaž, že tečny jsou vzájemně kolmé.

Literatura a zdroje

Čerpala jsem převážně ze skript Pavla Pecha *Kuželosečky*, ve kterých naleznete důkazy ke všem zmíněným větám a řešení některých cvičení. Skripta jsou dostupná na stránkách JČU: *https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf*.

[2]Rovnoosá hyperbola je taková, pro kterou je délka hlavní poloosy rovna délce vedlejší poloosy.