Řešil byste Vy kubickou rovnici?

Robert Šámal

Uvažme rovnici $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots = 0$. Co vlastně děláme při řešení této rovnice? Vezmeme její koeficienty, což jsou dle Viètových vztahů jakési symetrické polynomy jednotlivých kořenů. Konkrétně

$$
\begin{aligned}
a &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
b &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Když z těchto symetrických výrazů sestavíme nějaký vzorec, dostaneme opět výraz, který bude symetrický, tj. nezmění se při žádné záměně (permutaci) kořenů. (Platí dokonce věta, která říká, že každý symetrický polynom n proměnných jde vyjádřit pomocí a, b, $\dots$) To, že vůbec někdy umíme kořeny rovnice (tj. výrazy zcela nesymetrické) nějak vyjádřit, vypadá z tohoto pohledu jako malý zázrak. Vysvětlení je prosté: my nenajdeme vzorec, který vyjadřuje (např.) x_1, ale n vzorců, které vyjadřují (v nějakém pořadí) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Přesněji: tyto vzorce dokážeme najít jen pro $n \leq 4$, pro větší n to nejde. Na úvod bych měl ještě poznamenat, že tato přednáška vychází z kapitolky v krásné (byť poněkud nesrozumitelné) knížce *Luboš Motl, Miloš Zahradník: Pěstujeme lineární algebru.*

Kvadratická rovnice

Všimněme si nejprve, jak vlastně řešíme starou známou kvadratickou rovnici $x^2 - px + q = 0$. Vyjdeme z výrazu $V = x_1 - x_2$. Ten při záměně x_1 a x_2 změní znaménko. Tudíž V^2 se při záměně kořenů nezmění a vzhledem k tomu, že je to polynom, můžeme jej vyjádřit pomocí p, q, konkrétně $V^2 = p^2 - 4q$. Všimneme si dále, že z V a p umíme zjistit kořeny: $x_1 = (p+V)/2$, $x_2 = (p-V)/2$. Zbytek je snadný: odmocníme $p^2 - 4q$, tím získáme buď V nebo $-V$, přičtením p a vydělením dvěma získáme x_1 nebo x_2. Možná Ti tento postup připadal příliš podrobný. Uvádím ho zde proto, aby byl snáze pochopitelný postup pro kubickou rovnici.

Kubická rovnice

Mějme rovnici $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Vzhledem k tomu, že hledáme tři hodnoty, lze ve výsledku čekat třetí odmocninu. Potřebujeme tedy nějaký výraz, který se při permutaci kořenů změní o třetí odmocninu z jedné. Označme $\alpha = \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

a pišme $V = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$. Při cyklické záměně kořenů se hodnota V vynásobí $\pm\alpha$, tedy hodnota V^3 se nezmění. To vypadá nadějně, zkusme tedy výraz V^3 vyjádřit přesně. Než se do toho však pustíme, uvědomme si, že známe-li V a dále podobný výraz $W = x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3$, můžeme vyjádřit $x_1 = (a + V + W)/3$.

$$\begin{aligned}
V^3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\alpha x_1^2x_2 + 3\alpha^2 x_1x_2^2 + \\
&\quad + 3\alpha x_2^2x_3 + 3\alpha^2 x_2x_3^2 + 3\alpha x_3^2x_1 + 3\alpha^2 x_3x_1^2 \\
W^3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\alpha^2 x_1^2x_2 + 3\alpha x_1x_2^2 + \\
&\quad + 3\alpha^2 x_2^2x_3 + 3\alpha x_2x_3^2 + 3\alpha^2 x_3^2x_1 + 3\alpha x_3x_1^2.
\end{aligned}$$

Rozepíšeme-li α do reálné a imaginární složky, můžeme posledních šest členů ve V^3 (resp. W^3) psát jako $A \pm B$, kde

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{3}{2}\left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2\right) \\
B &= \frac{3\sqrt{3}i}{2}\left((x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) - (x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2)\right).
\end{aligned}$$

Výraz B při záměně dvou kořenů změní znaménko, jeho druhá mocnina je tedy už výraz symetrický. Po pár úpravách a vyjádření pomocí a, b, c dostaneme (zkus to sám!):

$$\begin{aligned}
S &= a^3 - 3ab + 9c \\
A &= -\frac{3}{2}(ab - 3c) \\
B^2 &= -\frac{27}{4}\left((ab - 3c)^2 - 4(3c^2 + b^3 + 3c^2 - 3abc + a^3c - 3abc + 3c^2)\right).
\end{aligned}$$

Tyto výrazy by nás mohly odradit, nicméně všimněme si, že bude-li $a = 0$, vše se značně zjednoduší. Naštěstí můžeme každou rovnici převést do tvaru, kde $a = 0$ (jak?), takže máme štěstí. Dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}
S &= 9c \\
A &= \frac{9}{2}c \\
B^2 &= 27^2\left(\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Nyní už stačí sklízet, co jsme zaseli. Neprve vyjádřeme $B \in 27\sqrt{(b/3)^3 + (c/2)^2}$. Úmyslně nepíšu $B = \dots$, protože druhá odmocnina může nabývat dvou různých hodnot. Zde můžeme zvolit libovolnou z nich (a tu budeme dále používat), tím ovlivníme jen pořadí, v němž kořeny dostaneme. S touto licencí můžeme tedy tvrdit, že $V^3 = 27\left(c/2 + \sqrt{(b/3)^3 + (c/2)^2}\right)$ a $W^3 = 27\left(c/2 - \sqrt{(b/3)^3 + (c/2)^2}\right)$. Tudíž $V \in 3\sqrt[3]{c/2 + \sqrt{(b/3)^3 + (c/2)^2}}$ a $W \in 3\sqrt[3]{c/2 - \sqrt{(b/3)^3 + (c/2)^2}}$. Dostáváme tedy kýžený vzorec

$$x_{1,2,3} \in \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}$$

Je tu ovšem malý zádrhel: na pravé straně máme celkem 9 součtů a potřebujeme nějak zjistit, které jsou ty správné. Snadno ovšem přepočítáme, že $VW = a^2 - 3b = -3b$, čili součin oněch dvou třetích odmocnin musí být roven $-b/3$. Při vlastním výpočtu tedy zvolíme libovolnou hodnotu první odmocniny a vybereme k ní příslušející hodnotu odmocniny druhé.

Rovnice vyšších řádů

Podobným postupem můžeme vyřešit rovnici čtvrtého stupně. Vyjdeme tentokrát od výrazu $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$. Podrobný postup si vyzkoušej sám. Pro rovnice vyššího řádu ovšem takový postup selže. A nejen to: lze i dokázat, že takovou rovnici nelze řešit. Zbyde-li čas, můžu se na přednášce zmínit, jak se to přibližně dělá.

Užití

To si předvedeme na přednášce.