Kružnicová inverzia

VIKTOR SZABADOS

ABSTRAKT. Prednáška je určená hlavne pre tých, čo o kružnicovej inverzii ešte nepočuli. Cieľom prednášky je oboznámiť poslucháča so základnými vlastnosťami kružnicovej inverzie a ponúknuť mu „nový nástroj“ na riešenie geometrických úloh, ktorého použitie si následne môže vyskúšať na príkladoch.

Sila tohto zobrazenia spočíva v tom, že dokáže previesť tvrdenia o kružniciach na tvrdenia o priamkach. Často sa komplikovaná geometrická situácia po vhodnom zobrazení inverziou zmení na jednoduchú a prístupnú klasickým metódam planimetrie. Inverzia má využitie nielen v matematických súťažiach, ale napríklad aj v algoritmoch počítajúcich prieniky kruhov.

Dohoda. Rovinu rozšírme o jediný bod ∞, o ktorom tvrdíme, že leží na všetkých priamkach.

Definícia. *Kružnicová inverzia* je geometrické zobrazenie určené kružnicou k so stredom O a polomerom r, ktoré bodu A priradí bod A' podľa nasledujúcich pravidiel:

(i) Ak je $A = O$, potom $A' = \infty$.
(ii) Ak je $A = \infty$, potom $A' = O$.
(iii) Inak je A' bod polpriamky OA, pre ktorú platí

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2.$$

Cvičenie. Je takto určené geometrické zobrazenie bijektívne?

Cvičenie. Má takéto zobrazenie nejaký samodružný bod (tj. bod, ktorý sa zobrazí sám na seba)?

Pri riešení týchto cvičení ste možno prišli na to, ako sa inverzia správa k bodom „vnútri“ kružnice $k(O, r)$, a celkovo ste si mohli všimnúť nasledujúce vlastnosti:

(i) Body kružnice k sú samodružné.
(ii) Ak leží bod A „vnútri“ kružnice k, leží obraz A' „vonku“ a naopak.
(iii) Inverzia prevedená dvakrát podľa rovnakej kružnice je identita.

Tvrdenie. (Konštrukcia obrazu) *Pre zadanú kružnicu k a jej vonkajší bod A označme T, U body dotyku kružnice k s jej dotyčnicami vedenými bodom A. Potom obraz A' bodu A v kružnicovej inverzii podľa kružnice k je stred úsečky TU.*

Kružnicová inverzia nie je zhodné ani podobné zobrazenie. Napriek tomu dokážeme vyjadriť vzdialenosť obrazov dvoch bodov pomocou polohy ich vzorov a kružnice inverzie.

Lema. *Je zadaná kružnica $k(O, r)$ a body X, Y. Označme X', Y' obrazy bodov X, Y v inverzii podľa kružnice k. Platí:*

(i) $|\sphericalangle OX'Y'| = |\sphericalangle XYO|$,
(ii) $|X'Y'| = |XY|\frac{r^2}{|OX|\cdot|OY|}$,
(iii) $|XY| = |X'Y'|\frac{r^2}{|OX'|\cdot|OY'|}$.

Vyzerá to dosť komplikovane: vzdialenosť obrazov závisí od $|OX|$ aj $|OY|$ a nevidno z toho, ako inverzia mení vzdialenosti. Napriek tomu je tento vzťah na niečo užitočný, ako sa presvedčíme na príkladoch.

Tvrdenie. *Uvážme kružnicovú inverziu určenú kružnicou k so stredom O. Potom platí:*

(i) *Obrazom priamky prechádzajúcej bodom O je ona sama.*
(ii) *Obrazom priamky neprechádzajúcej bodom O je kružnica.*
(iii) *Obrazom kružnice prechádzajúcej bodom O je priamka.*
(iv) *Obrazom kružnice neprechádzajúcej bodom O je kružnica.*

Poznámka. Pozor! Kružnicová inverzia síce celkom často zobrazuje kružnice na kružnice, všeobecne ale neplatí, že by sa na seba zobrazili aj ich stredy.

Vyzbrojení týmito poznatkami si môžeme trúfnuť vyriešiť niekoľko úloh.

Príklad. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, B. Vezmime priamku p prechádzajúcu bodom B, jej druhý priesečník s kružnicou k označme C, jej druhý priesečník s kružnicou ℓ označme D. Dokážte, že veľkosť uhla CAD nezávisí od polohy priamky p.

Riešenie. Zaujíma nás veľkosť uhla zovretého priamkami AC a AD. Obe tieto priamky prechádzajú bodom A, navyše týmto bodom prechádzajú aj obe kružnice k, ℓ. Zobrazme teda celú situáciu v inverzii so stredom A a nejakým polomerom r. Obrazmi kružníc k, ℓ budú priamky k', ℓ' s priesečníkom B'. Obrazom priamky p je kružnica p', ktorá prechádza bodom A. Táto kružnica pretína priamku k' po druhýkrát v bode C' a priamku ℓ' po druhýkrát v bode D'.

Máme tri možné poradia, ako môžu na kružnici p' ležať tieto body: A, C', B', D', alebo A, B', C', D', alebo A', C', D', B'. Vo všetkých troch prípadoch je veľkosť uhla $C'AD'$ rovná veľkosti uhla zovretého priamkami k', ℓ' – toho, v ktorom neleží bod A. A to je presne to, čo sme chceli dokázať. $\square$

Cvičenie. Pomôcka k nasledujúcemu príkladu. Dokážte bez použitia inverzie. Je daný trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I (v angličtine sa tento bod nazýva *incenter*). Dokážte, že os strany AB, os uhla ACB a kružnica opísaná trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. Označme tento bod S. Dokážte, že S je stred kružnice opísanej trojuholníku ABI.

Príklad 1. V rovine sú dané tri zhodné kružnice, ktoré prechádzajú spoločným bodom H. Označme druhé priesečníky týchto kružníc A, B, C (rôzne od H). Dokážte, že H je ortocentrum trojuholníka ABC.

Príklad 2. Priamka p pretne kružnicu k v bodoch X, Y. Označme R stred oblúku XY. Bodom R vedieme dve priamky, ktoré pretnú kružnicu k v bodoch A, B a priamku p v bodoch C, D. Ukážte, že body A, B, C, D ležia na jednej kružnici.

Príklad 3. (Ptolemaiova nerovnosť) Nech $ABCD$ je štvoruholník. Potom platí:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|,$$

rovnosť nastáva práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCD$ tetivový.

Príklad 4. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Kružnica k_3 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch C, E. Kružnica k_4 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch D, F. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ACE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ADF. (Poľská MO 2004)

Príklad 5. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, C. V bode A spravíme dotyčnicu ku k, tá druhýkrát pretne kružnicu ℓ v bode D. Bod B je priesečníkom kružnice k s dotyčnicou ku kružnici ℓ v bode A. Dokážte, že $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |AD|$.

Príklad 6. Kružnica ℓ sa zvnútra dotýka kružnice k v bode A. Zvolíme bod B na kružnici ℓ. Dotyčnica ku ℓ v bode B pretne kružnicu k v bodoch D, E. Označme C stred toho oblúka DE kružnice k, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že body A, B, C ležia na priamke.

Príklad 7. Dané sú kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_i sa zvonka dotýka k_{i+1} pre $i = 1, 2, 3, 4$ $(k_5 = k_1)$. Dokážte, že štyri dotykové body týchto kružníc ležia na jednej kružnici.

Príklad 8. Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný. (Poľská MO 2004)

Zvyšné úlohy sú prevzaté a mali by sa dať riešiť inverziou, neskúmal som ich podrobne.

Príklad 9. Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán CA, CB ležia v tomto poradí body Y, X. Nech P je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABXY$. Nech Q je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BYC a AXC rôzny od bodu C. Dokážte, že body P, Q, C ležia na priamke práve vtedy, keď je štvoruholník $ABXY$ tetivový.

Príklad 10. Dané sú dve kružnice k, ℓ pretínajúce sa v bodoch D a A. Spoločná dotyčnica týchto kružníc bližšia k bodu A sa dotýka kružnice k v bode E a kružnice ℓ v bode F. Rovnobežka so spoločnou dotyčnicou prechádzajúca bodom D pretína kružnicu k v bode C a kružnicu ℓ v bode B (tieto body sú rôzne od bodu D). Dokážte, že druhý priesečník (rôzny od bodu D) kružníc opísaných trojuholníkom CDF a BDE leží na priamke AD.

Príklad 11. V rovine je daný trojuholník DEF a tri body A, B, C. Dokážte, že existuje kružnica taká, že keď podľa nej urobíme inverziu, tak obrazy A', B' C' bodov A, B, C vytvoria trojuholník $A'B'C'$ podobný trojuholníku DEF.

Príklad 12. Dve kružnice sa dotýkajú zvonka v bode A. Do krivočiareho trojuholníka určeného týmito kružnicami a ich spoločnou dotyčnicou vpíšeme kružnicu so stredom O a polomerom r. Dokážte, že $|AO| \leq 3r$.

Príklad 13. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Priamka rôzna od AB pretína kružnicu k_1 v bodoch C, D, kružnicu k_2 v bodoch E, F a priamku AB v bode P ležiacom mimo úsečky AB. Dokážte, že priamka spájajúca stredy kružníc opísaných trojuholníkom ACE a BDF prechádza bodom P. (Poľská MO 2002)

Príklad 14. Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a nech D je bod na strane BC. Dokážte, že kružnice dotýkajúce sa k, AD, AB a k, AD, DC sa navzájom dotýkajú práve vtedy, keď uhly BAD a CAD majú rovnakú veľkosť.
(Rumunsko 1997)

Hinty k príkladom

Hint k pr. 1. Stačí ukázať, že AH je kolmé na BC a využiť predchádzajúce cvičenie.

Hint k pr. 2. Uvážte inverziu so stredom R, ktorá zobrazí p na k, a všimnite si, že body C, D prejdú na body A, B.

Hint k pr. 3. Čo pripomína dokazovaný vzťah?

Hint k pr. 4. Preč s kružnicami! Ako sa zmení dokazované tvrdenie?

Hint k pr. 5. Vieme sa vhodnou inverziou zbaviť nejakých kružníc?

Hint k pr. 6. Dá sa robiť inverzia tak, aby sa kružnica k zobrazila na priamku DE?

Hint k pr. 7. Za stred inverzie zvoľte ľubovoľný dotykový bod a využite rovnoľahlosť.

Hint k pr. 8. Skúste použiť inverziu so stredom v bode C a polomerom $|CA|$.

Literatúra a zdroje:

Pri tvorbe prednášky som väčšinu čerpal zo starších príspevkov Jozefa „Pepu" Tkadleca a Michala „Kennyho" Rolínka a z prednášok Jána „Maza" Mazáka, ktorým by som týmto veľmi rád poďakoval.

[1] *http://www.mathlinks.ro*
[2] Archív MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/archiv*
[3] *http://www.kms.sk/~mazo/matematika/matematika.php*