Kružnice opsaná a vepsaná čtyřúhelníku

Jaroslav Hančl

Úvod

Celkem běžně se v geometrii a především v olympiádách vyskytují úlohy o čtyřúhelnících a jejich příslušných kružnicích. V této přednášce se nejprve seznámíme s teorií, následně se naučíme kresli obrázky a nakonec vyřešíme pár příkladů a naučíme se hledat správné cesta k řešení.

Obvodové úhly

Definice. Obvodový úhel *na kružnici je takový úhel, jehož vrchol leží na kružnici a obě jeho ramena jsou sečnami kružnice.* Středový úhel *v kružnici je úhel, jehož vrchol je ve středu kružnice a jehož ramena procházejí středem kružnice.*

Věta. *Obvodové úhly sestrojené nad touž tětivou mají shodnou velikost, která je rovna polovině středového úhlu příslušící k dané tětivě.*

Kružnice opsaná

Definice. Tětivový čtyřúhelník *budeme nazývat takový konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice.*

Jedná se tedy o kružnici opsanou danému konvexnímu čtyřúhelníku.

Věta. *Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, je-li splněna podmínka: Součet protějších úhlů čtyřúhelníku je* $180°$.

Věta. *Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku rovněž splňují tzv.* Ptolemaiovu větu*:*

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$$

Příklad 1. Máme zadané tři kružnice k, l, m procházející jediným společným bodem P. Další průniky kružnic k, l, kružnic l, m a kružnic k, m označme postupně A, B, C. Nyní zvolme na kružnici k bod K různý od A, P, C. Přímka KA protne kružnici l v bodě L a přímka LB protne kružnici m v bodě M. Dokažte, že bod C leží na přímce KM.

Příklad 2. Nechť kružnice k prochází středem kružnice a. Zvolme na kružnici k bod Ž a veďme tímto bodem tečny ke kružnici a. Průniky těchto tečen s kružnicí k označme A a B. Dokažte, že přímka AB je kolmá na střednou kružnic k a a.

Kružnice vepsaná

Definice. Tečnový čtyřúhelník *budeme nazývat takový konvexní čtyřúhelník, který je opsán kružnici.*

Jedná se tedy o kružnici, která se dotýká všech stran čtyřúhelníku neboli kružnici vepsanou danému konvexnímu čtyřúhelníku.

Věta. *Každý tečnový má tu vlastnost, že součet délek dvou protilehlých stran je roven součtu délek zbylých dvou protilehlých stran.*

Příklad 3. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC mají vnější dotyk.

Příklady

Příklad 4. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme S průsečík jeho úhlopříček a paty kolmic z bodu S na přímky AB a CD označme E a F. Dokažte, že osa úsečky EF prochází středy stran BC a DA.

Příklad 5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Jeho stranám AB a BC jsou vně připsané shodné pravoúhelníky $ABMN$ a $LBCK$, kde $|AB| = |LB|$. Dokažte, že přímky AL, NK a MC procházejí jedním bodem.

Příklad 6. Nechť kružnice k s průměrem AB protíná kružnici l, jejíž střed je v bodě A v bodech C a D. Uvažujme bod M různý od bodů C a D, který leží na kružnici l. Označme P a Q po řadě průsečíky přímek CM a DM s kružnicí k. Dokažte, že $MPBQ$ je rovnoběžník.

Příklad 7. Je zadán čtyřúhelník takový, že existují postupně body E a F na průniku AB,CD a AD, BC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADE a BCE procházejí společným bodem.

Příklad 8. Dokažte, že středy kružnic ABF, CDF, ADE a BCE z předchozího příkladu leží na jedné kružnici.

Příklad 9. V daném trojúhelníku ABC označme X a Y paty kolmic spuštěných z vrcholu A na osy vnitřních úhlů u vrcholů B a C. Dokažte, že přímky BC a XY jsou rovnoběžné.