Geometrie – kružnice opsané, vepsané, připsané a další

Martin Tancer

Cílem přednášky bude připomenout nějaké základní i hlubší pojmy z geometrie a pomocí nich řešit geometrické úlohy. Budeme se zabývat především vlastnostmi kružnic odvozenými od nějakého trojúhelníku nebo čtyřúhelníku.

Definice. *Mocností bodu X ke kružnici k se středem S a poloměrem r budeme rozumět výraz $|XS|^2 - r^2$.*

Definice. *Chordálou kružnic k a l budeme rozumět množinu bodů X takových, že X má stejnou mocnost ke kružnici k jako ke kružnici l.*

Obecně známé vlastnosti chordály jsou, že se jedná o přímku kolmou na spojnici středů k a l. Pokud mají k a l neprázdný průnik, potom chordála prochází body průniku (takové body mají nulovou mocnost k oběma kružnicím).

Věta. (Cévova věta – zjednodušená verze) *Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť body X, Y a Z leží po řadě na přímkách AB, BC, CA. Potom přímky CX, AY a BZ procházejí jedním bodem, právě když platí:*

$$\frac{|AX| \cdot |BY| \cdot |CZ|}{|BX| \cdot |CY| \cdot |AZ|} = 1.$$

Příklad 1. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť X, Y, Z jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CA. Dokažte, že přímky CX, AY a BZ prochází jedním bodem.

Příklad 2. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť X, Y, Z jsou po řadě body dotyku kružnic připsaných stranám AB, BC, CA a trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímky CX, AY a BZ procházejí jedním bodem.

Příklad 3. Na straně AB trojúhelníku ABC leží bod X takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům AXC a BXC mají společný dotyk. Charakterizujte bod X.

Příklad 4. Nechť o je osa úhlu BAC v trojúhelníku ABC. Charakterizujte průsečík o a kružnice opsané (samozřejmě různý od A).

Příklad 5. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť S je střed kružnice vepsané a S_a je střed kružnice připsané straně BC. Dokažte, že čtyřúhelník SBS_aC je tětivový. Charakterizujte střed kružnice opsané tohoto čtyřúhelníku.

Příklad 6. Mějme dán trojúhelník ABC, označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Nechť p_A, p_B, p_C jsou po řadě přímky kolmé na úsečky SA, SB, SC

procházející středy těchto úseček. Nechť T je trojúhelník určený přímkami p_A, p_B a p_C. V závislosti na poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC určete poloměr kružnice opsané T.

Příklad 7. Mějme dán trojúhelník ABC, označme k kružnici opsanou ABC. Nechť S_A, S_B jsou středy oblouků BC, CA a nechť k_A, k_B jsou kružnice se středy S_A, S_B dotýkající se trojúhelníku ABC.

(a) Dokažte, že existuje společná tečna t kružnic k_A a k_B procházející středem kružnice vepsané ABC.

(b) Dokažte, že přímka t je rovnoběžná s přímkou AB.

Příklad 8. Kružnice vepsaná čtyřúhelníku $ABCD$ se dotýká jeho stran DA, AB, BC, CD po řadě v bodech K, L, M, N. Nechť k_1, k_2, k_3, k_4 jsou kružnice vepsané po řadě trojúhelníkům AKL, BLM, CMN, DNK. Uvažujme společné vnější tečny ke dvojicím kružnic (k_1, k_2), (k_2, k_3), (k_3, k_4), (k_4, k_1) různé od stran čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku, jehož strany leží na těchto společných tečnách, jsou navzájem kolmé.