Kruhová inverze

Pepa Tkadlec

Abstrakt. Příspěvek seznamuje se základními vlastnostmi kruhové inverze a na úlohách ze světových soutěží ilustruje, kdy je vhodné inverzi při řešení použít. Obsahuje jeden řešený příklad a stručné návody ke všem ostatním.

Kruhová inverze je jedno z nejexotičtějších geometrických zobrazení. Přestože nezachovává ani tak jednoduché objekty jako jsou přímky, má řadu překvapujících a užitečných vlastností, díky nimž je velmi silným nástrojem při řešení jinak obtížných geometrických úloh.

Definice

Úmluva. Rovinu rozšíříme o (jediný) bod ∞, o němž prohlásíme, že leží na všech přímkách.

Definice. *Kruhová inverze* je geometrické zobrazení určené kružnicí k se středem I a poloměrem r, které bodu A přiřadí bod A' podle následujícího pravidla:

(i) Je-li $A = I$, pak $A' = \infty$.
(ii) Je-li $A = \infty$, pak $A' = I$.
(iii) Jinak je A' ten bod polopřímky IA, pro nějž platí

$$|IA'| \cdot |IA| = r^2.$$

Vlastnosti

Takto definované zobrazení má triviálně následující vlastnosti:

(i) Body kružnice k jsou samodružné.
(ii) Leží-li bod A uvnitř kružnice k, leží obraz A' venku a naopak.
(iii) Inverze provedená dvakrát podle téže kružnice je identita.

Klíčová slova. kruhová inverze, planimetrie, geometrie, geometrická zobrazení

Tvrzení. (Konstrukce obrazu) *Je dána kružnice k a bod A vně této kružnice. Tečny ke kružnici k vedené bodem A se jí dotýkají v bodech T, U. Pak obraz A' bodu A v kruhové inverzi podle kružnice k je střed úsečky TU.*

Lemma. (Přepočítávací lemma) *Je dána kružnice $k(I, r)$ a body X, Y. Označme X', Y' obrazy bodů X, Y v inverzi podle kružnice k. Pak*

(i) $|\sphericalangle IX'Y'| = |\sphericalangle XYI|$,
(ii) $|X'Y'| = |XY| \cdot \frac{r^2}{|IX| \cdot |IY|}$,
(iii) $|XY| = |X'Y'| \cdot \frac{r^2}{|IX'| \cdot |IY'|}$.

Cvičení. (Tětivové čtyřúhelníky) Je dána kružnice k se středem I a body A, B takové, že neleží na jedné přímce s I. Označme A', B' obrazy bodů A, B v inverzi podle k. Ukažte, že body A, B, A', B' leží na jedné kružnici.

Tvrzení. (Stěžejní) *Uvažme kruhovou inverzi určenou kružnicí k se středem I. Pak*

(i) *Obrazem přímky procházející bodem I je ona sama.*
(ii) *Obrazem přímky* **ne***procházející bodem I je kružnice.*
(iii) *Obrazem kružnice procházející bodem I je přímka.*
(iv) *Obrazem kružnice* **ne***procházející bodem I je kružnice.*

Cvičení. (Středy kružnic) Podle předchozího tvrzení je obrazem kružnice k se středem O nějaká kružnice k' se středem S (neprochází-li k středem inverze I). Ukažte, že ačkoliv bod S leží na polopřímce IO, není to obraz bodu O (kruhová inverze na sebe tedy nezobrazuje středy kružnic).

Cvičení. (Samodružné kružnice) Podle předchozího tvrzení se přímka zobrazí na sebe sama právě tehdy, když prochází středem inverze. Které kružnice mají tuto vlastnost také?

Záhadou zůstává, jak rozpoznat, že na úlohu lze zaútočit inverzí. Několik rysů nás může k použití inverze navést. Proberme je postupně.

Máme vzor i obraz

Umíme-li v obrázku interpretovat některou přímku nebo kružnici jako obraz jiné přímky či kružnice ve vhodné inverzi, může pouhé uvážení této inverze vnést do úlohy zcela nové světlo.

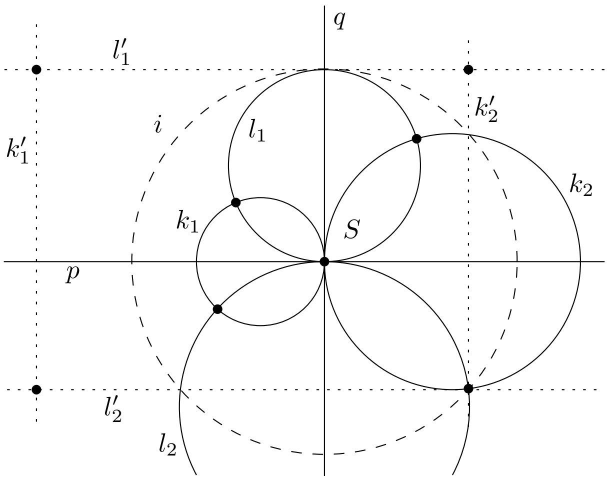
Příklad 1. Přímka p protne kružnici k v bodech X, Y. Označme $\check{S}$ střed jednoho oblouku XY. Bodem $\check{S}$ vedeme dvě přímky, které protnou kružnici k v bodech A, B a přímku p v bodech C, D. Ukažte, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Příklad 2. Kružnice k_1, k_2, k_3 mají po dvou vnější dotyk. Kružnice l má se všemi třemi vnější dotyk postupně v bodech L_1, L_2, L_3. Kružnice m má se všemi třemi vnitřní dotyk postupně v bodech M_1, M_2, M_3. Ukažte, že přímky L_1M_1, L_2M_2, L_3M_3 procházejí jedním bodem. (PraSe)

Typické použití kruhové inverze je ale jiné. Kruhová inverze nám totiž umožňuje řešit místo zadané úlohy jinou (ale ekvivalentní) úlohu v jiném (zinvertovaném) obrázku. Tento princip objasňuje následující řešený příklad.

Příklad 3. Kolmé přímky p, q se protínají v bodě S. Kružnice k_1, k_2 se středy na přímce p a procházející bodem S protínají kružnice l_1, l_2 se středy na přímce q a rovněž procházející bodem S podruhé ve čtyřech různých bodech. Ukažte, že tyto čtyři body leží na jedné kružnici.

Řešení. Invertujme podle kružnice i se středem S a libovolným poloměrem. Tvrzení bude dokázáno, pokud se nám podaří ukázat, že *obrazy* zmíněných čtyř průsečíků leží na kružnici neprocházející bodem S, protože původní čtyři druhé průsečíky budou potom muset ležet na obrazu této kružnice v inverzi podle i, což je podle *Stěžejního tvrzení* kružnice.



Přímky p, q se v inverzi podle i zobrazí samy na sebe. Kružnice k_1, k_2 se zobrazí na nějaké přímky k_1', k_2' obě kolmé na p. Obdobně se kružnice l_1, l_2 zobrazí na přímky l_1', l_2' obě kolmé na q. Obrazy zmíněných čtyř druhých průsečíků jsou proto vrcholy obdélníka. Vrcholy obdélníka leží na kružnici, tato kružnice neprochází bodem S a my jsme hotovi. □

Zbývá umět rozpoznat, podle kterého bodu a s jakým poloměrem invertovat.

„Přetížený“ bod

V úlohách, které překypují kružnicemi, volíme za střed inverze bod, jímž prochází hodně kružnic či přímek (tzv. „přetížený“ bod). Po inverzi pak dostaneme podstatně jednodušší obrázek, v němž již bývá snadné ekvivalent dokazovaného tvrzení dokázat. Na poloměru inverzní kružnice při tom zpravidla vůbec nezáleží.

Příklad 4. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T a obě mají vnitřní dotyk s kružnicí m po řadě v bodech U, V. Přímka UT protne kružnici m podruhé v bodě X. Ukažte, že $|\sphericalangle TVX| = 90°$. (KMS)

Příklad 5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a uvnitř jeho stran AC, BC po řadě body D, E. Dokažte, že paty výšek z bodu C na přímky AB, AE, BD, DE leží na jedné kružnici.

Příklad 6. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB postupně v bodech D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku BCX se dotýká jeho stran BC, CX, XB postupně v bodech D, Y, Z. Ukažte, že body E, F, Y, Z leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 1995)

Příklad 7. Je dána půlkružnice t nad průměrem AB. Přímka p kolmá na AB protíná úsečku AB v bodě C a půlkružnici t v bodě D. Kružnice k se dotýká úsečky AC v bodě E, půlkružnice t v bodě T a navíc přímky p. Dokažte, že DE půlí úhel ADC. (Izrael 1995)

Příklad 8. Dvojice kružnic k_1 a k_2, k_2 a k_3 a k_3 a k_1 mají postupně vnější dotyk v bodech K_3, K_1, K_2. Navíc mají k_1, k_2, k_3 postupně vnitřní dotyk z kružnicí m v bodech M_1, M_2, M_3. Dokažte, že přímky K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3 procházejí jedním bodem.

Příklad 9. Kružnice k, l se protínají v bodech A, D. Jejich společná tečna bližší bodu A se dotýká k v E a l v F. Rovnoběžka s touto tečnou procházející bodem D protne kružnice k, l podruhé v bodech C, B. Kružnice opsané trojúhelníkům CDF a BDE se podruhé protínají v bodě P. Ukažte, že body D, A, P leží v přímce. (Brkos 2011)

Divné podmínky

Indikátorem toho, že budeme chtít invertovat, jsou i divné podmínky. Často se totiž do „rozumného“ tvaru přeloží v současném zadání nepřirozeně vyhlížející vztah o velikostech úhlů nebo délkách (máme na paměti *Přepočítávací lemma*), nebo vyjdou najevo významy některých umělých konstrukcí.

Příklad 10. Kružnice k_1 a k_3 stejně jako k_2 a k_4 mají vnější dotyk v P. Označme druhé průsečíky $k_1 \cap k_2 = A$, $k_2 \cap k_3 = B$, $k_3 \cap k_4 = C$ a $k_4 \cap k_1 = D$. Dokažte, že

$$\frac{|AB| \cdot |BC|}{|AD| \cdot |DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

(IMO shortlist 2003)

Příklad 11. Bod P uvnitř trojúhelníka ABC splňuje

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Označme D, E středy kružnic vepsaných trojúhelníkům APB, APC. Dokažte, že přímky AP, BD, CE procházejí jedním bodem. (IMO 1996)

Příklad 12. (Ptolemaiova věta) Dokažte, že ve čtyřúhelníku $ABCD$ se standardně značnými délkami stran a úhlopříček platí

$$ac + bd \geq ef,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.

Příklad 13. Je dán trojúhelník ABC. Označme polovinu jeho obvodu s. Na přímce AB nalezneme body E, F tak, že $|CE| = |CF| = s$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CEF se dotýká kružnice připsané trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholu C.

Příklad 14. Nechť je dán trojúhelník ABC. Označme S střed jemu vepsané kružnice l a označme P, Q, R dotykové body kružnice l po řadě se stranami BC, AC, AB. Buď k kružnice opsaná středům stran trojúhelníku PQR. Buď $X \neq C$ průsečík přímky CS a kružnice opsané trojúhelníku ABC, buď Y průsečík úsečky SX a kružnice k. Buď Z jeden z průsečíků kružnice l a kolmice k přímce CX vedené bodem Y. Dokažte, že přímka XZ se dotýká kružnice l. (PraSe)

Dominantní úhel

Mnohdy je užitečné invertovat podle vrcholu dominantního úhlu, pokud úloha takový má.

Příklad 15. Je dán trojúhelník ABC. Uvažme kružnici l, která se dotýká stran AB, AC a navíc jeho kružnice opsané v bodě T. Označme ještě D bod dotyku kružnice připsané trojúhelníku ABC vzhledem k vrcholu A se stranou BC. Ukažte, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAT|$.

Příklad 16. Na stranách AB, AC trojúhelníka ABC zvolme body K, L tak, aby $KL \| BC$ a buď $P = AL \cap BK$. Označme Q druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BPK a CPL. Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CAQ|$.

(Balkan MO 2009)

Zvol si poloměr!

V předchozích úlohách stačilo odhalit střed inverze a aplikovat inverzi s libovolným poloměrem. U následujících úloh je již potřeba zvolit i vhodný poloměr – tedy invertovat podle nějaké konkrétní kružnice.

Příklad 17. Na půlkružnici nad průměrem AB a se středem O zvolíme body C, D. Předpokládejme, že se polopřímky AB a DC protnou v bodě M. Označme K druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AOD a BOC. Ukažte, že $|\sphericalangle MKO| = 90°$.

(Rusko 1995)

Příklad 18. Ukažte, že Feuerbachova kružnice[1] trojúhelníka ABC se dotýká jeho kružnice vepsané i všech jeho kružnic připsaných.

Příklad 19. Označme M, N, P body dotyku kružnice vepsané trojúhelníka ABC postupně se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníka MNP, střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC a střed O kružnice trojúhelníku ABC opsané leží v přímce. (Írán 1995)

Příklad 20. (Steinerův porismus) Uvnitř kružnice k je dána kružnice l. Předpokládejme, že existuje n-prvkový řetěz kružnic $m_1, \ldots, m_n$ takový, že každá kružnice v řetězu má vnější dotyk se svými dvěma sousedními kružnicemi a s l a vnitřní dotyk s k. Potom každá kružnice mající vnější dotyk s l a vnitřní dotyk s k je částí nějakého n-prvkového řetězu.

Příklad 21. Je dán trojúhelník ABC. Body D, E leží na přímce AB v pořadí D, A, B, E tak, že $|AD| = |AC|$ a $|BE| = |BC|$. Osy úhlů u vrcholů A a B protnou strany BC a AC po řadě v bodech P, Q a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech M, N. Označme U, V středy kružnic opsaných trojúhelníkům BME, AND. Konečně buď $X = AU \cap BV$. Dokažte, že $CX \perp PQ$. (Srbsko TST 2008)

Stručné návody

Návod k příkladu 1. Uvažte inverzi se středem $\check{S}$, která zobrazí p na k a všimněte si, že body C, D přejdou na body A, B.

Návod k příkladu 2. Uvažte inverzi podle kružnice opsané trojúhelníku tvořenému body dotyku kružnic k_1, k_2, k_3 a všimněte si, že tyto kružnice se v inverzi zachovají. Kružnice l, m se tedy prohodí. Společným průsečíkem je střed inverze.

Návod k příkladu 4. Invertujte podle T a dokazujte $|uhelV'X'T| = 90°$.

Návod k příkladu 5. Invertujte podle C. Obrazy pat výšek interpretujte jako průsečíky kružnic nad průměry CA, CB, CD, CE; tyto tvoří obdélník.

Návod k příkladu 6. Invertujte podle D. Zobrazte nejdříve body A a B a obě kružnice. Rozmyslete si, že obraz $EFYZ$ je obdélník.

Návod k příkladu 7. Invertujte podle E. Dokazované tvrzení přejde v to, že je jistý trojúhelník rovnoramenný.

Návod k příkladu 8. Invertujte podle některého z bodů dotyku. Dva ze tří bodů, které budou mět ležet v přímce, určují chordálu jistých dvou kružnic. Ukažte, že třetí bod má k oběma stejnou mocnost.

Návod k příkladu 9. Invertujte podle D a rozpoznejte trojúhelník s Gergonnovým bodem.

[1]Feuerbachova kružnice je kružnice procházející středy stran a patami výšek trojúhelníka.

Návod k příkladu 10. Invertujte podle P. Přepočtěte dokazovaný vztah a využijte tho, že v rovnoběžníku mají protější strany shodnou délku.

Návod k příkladu 11. Invertujte podle A nebo P. Využijte, že osa úhlu dělí protější stranu ve známém poměru, tyto poměry dejte do rovnosti a přepočtěte. Vyjde, že jistý trojúhelník má být rovnoramenný, což je díky přepočtení zadané úhlové podmínky.

Návod k příkladu 12. Invertujte podle jednoho z vrcholů. Ptolemaiova nerovnost je „obrazem“ trojúhelníkové nerovnosti.

Návod k příkladu 13. Invertujte podle C s poloměrem s. Všimněte si, že na této kružnici leží i body dotyku kružnice připsané s prodlouženími stran CA, CB.

Návod k příkladu 14. Invertujte podle kružnice vepsané torjúhelníku ABC.

Návod k příkladu 15. Invertujte podle A. Kružnice l přejde v přímku antirovnoběžnou se stranou BC. Dokončete uvážením osové souměrnosti podle osy úhlu BAC.

Návod k příkladu 16. Rozpoznejte Q jako Miquelův bod čtyřúhelníka $AKPL$ a dokreslete kružnice $ABQL$ a $AKQC$. Invertujte podle A.

Návod k příkladu 17. Invertujte podle zadané půlkružnice a rozpoznejte obrázek s ortocentrem a Feuerbachovou kružnicí.

Návod k příkladu 18. Invertujte podle kružnice se středem ve středu strany a poloměrem po body dotyku s vepsanou a připsanou kružnicí. Uvědomte si, že vepsaná i připsaná se zachovají a ukažte, že obrazem Feuerbachovy kružnice bude jejich druhá společně vnitřní tečna (spočtěte jednak její úhel se stranou, druhak pozici průsečíku).

Návod k příkladu 19. Invertujte podle vepsané kružnice. Uvědomte si, že obrazem kružnice opsané $\triangle ABC$ je Feuerbachova kružnice $\triangle MNP$ a vzpomeňte na Eulerovu přímku.

Návod k příkladu 20. Invertujte tak, aby kružnice k, l přešly v soustředné kružnice. Pak je tvrzení zřejmé.

Návod k příkladu 21. Invertujte podle A s poloměrem $\sqrt{bc}$ a interpretujte přímku AU jako obraz přímky AO (kde O je střed opsané trojúhelníku CPQ) v osové souměrnosti podle osy úhlu u vrcholu A. Totéž proveďte s B a vzpomeňte na to, že střed opsané a ortocentrum jsou isogonal conjugates.

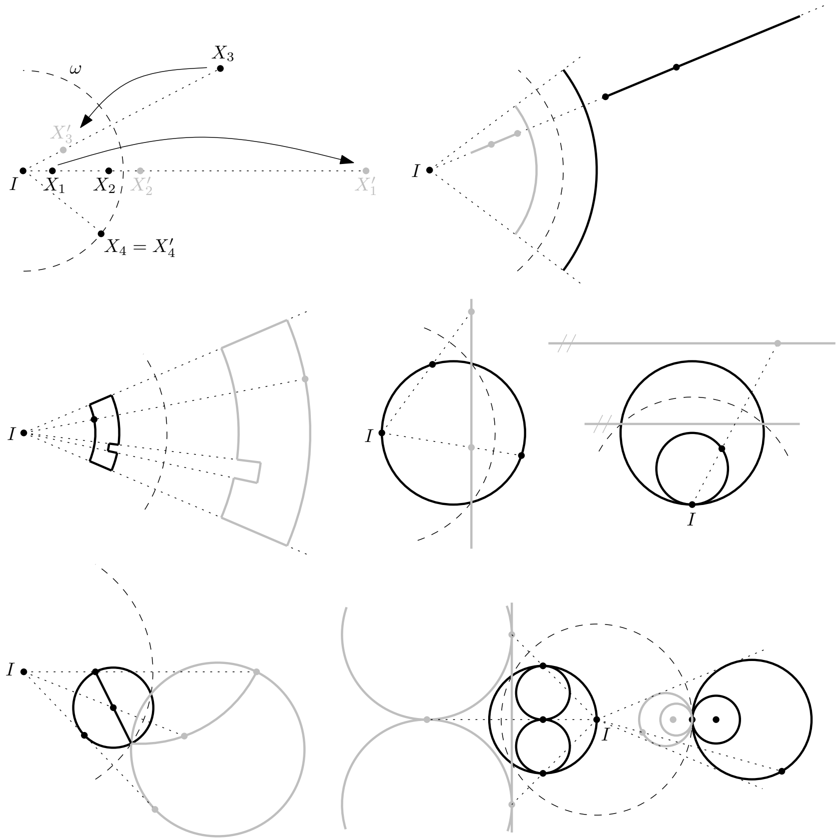
Literatura

Při tvorbě příspěvku jsem čerpal ze starších příspěvků Michala „Kennyho“ Rolínka a Martina Tancera, jimž bych tímto rád poděkoval, a z

[1] *Mathlinks*, *http://www.mathlinks.ro*
[2] *Zadači*, *problems.ru*
[3] Archiv MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/archive*

Obrázková příloha

Na ukázku:



A na procvičení: