Kruhová inverze

PAVEL PODBRDSKÝ — 14. BŘEZNA 2001

Úvod

S kruhovou inverzí jsi se možná již setkal, např. v 6. sérii letošního ročníku PraSete. Do této přednášky jsem se snažil zařadit hlavně věci, na které v semináři nezbylo místo, doufám, že se každý dozví něco nového...

Co to je kruhová inverze?

Je to geometrické zobrazení — předpis, který bodům (v našem případě bodům v rovině) přiřazuje body. K jejímu určení potřebujeme bod S — tzv. střed kruhové inverze — a kladné reálné číslo r — tzv. poloměr kruhové inverze. Bod $X \neq S$ zobrazíme na bod X' takto:

(1) X' leží na polopřímce $\mapsto SX$
(2) $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$

Často je výhodné k rovině přidat ještě jeden „nevlastní" bod (bod ∞) a domluvit se, že S se zobrazí na ∞ a naopak. Když se ještě domluvíme, že bod ∞ bude ležet na každé přímce, dovolí nám to jednodušeji zformulovat některé vlastnosti kruhové inverze.

Vlastnosti kruhové inverze

Uvedeme zde několik základních a při řešení příkladů velice užitečných vlastností kruhové inverze. Podle zájmu si můžeme na přednášce některé z nich dokázat.

(1) Dvojím provedením téže kruhové inverze dostaneme identitu.
(2) Kružnice se středem v S se zobrazí na kružnici se středem v S. Speciálně — kružnice se středem v S a poloměrem r je samodružná (tj. zobrazí se sama na sebe).
(3) Vnitřek samodružné kružnice se zobrazí na její vnějšek a naopak. To znamená, že rovina se jaksi obrátí naruby kolem samodružné kružnice — odtud získala kruhová inverze své jméno.
(4) Přímka procházející středem (tj. bodem S) je samodružná.
(5) Přímka neprocházející středem se zobrazí na kružnici procházející středem a naopak.
(6) Kružnice neprocházející středem se zobrazí na kružnici neprocházející středem.
(7) Úhel mezi dvěma křivkami v jejich průsečíku se zachovává, pokud tento průsečík není bod S.

Ještě jedna užitečná vlastnost

Věta. Nechť je dán bod S, poloměr r a body A, B různé od S. Pak pro A' a B' obrazy bodů A, B v kruhové inverzi podle kružnice se středem S a poloměrem r platí

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{r^2}{|AS| \cdot |BS|}.$$

Souvislost s komplexními čísly

Tento odstaveček je malá odbočka pro ty, kteří se již setkali s pojmem komplexního čísla. Na přednášce se (pokud nebude mimořádný zájem) této oblasti nehodlám příliš věnovat. Pro jednoduchost teď uvažujme kruhovou inverzi podle jednotkové kružnice se středem v počátku. Body roviny můžeme interpretovat jako komplexní čísla v Gaussově rovině. Uvažovaná kruhová inverze pak má velice jednoduchý analytický předpis:

$$z \mapsto 1/\bar{z}.$$

Pomocí tohoto předpisu jsme často schopni mnohé věci o kruhové inverzi celkem snadno dokázat (můžeš si to vyzkoušet na některých z vlastností (1) až (7) uvedených v předminulém odstavci).

Appoloniovy úlohy

Appoloniova úloha je konstrukční úloha ve které hledáme kružnici, která vyhovuje třem podmínkám. Každá z podmínek říká buď, že se hledaná kružnice dotýká dané přímky či kružnice, anebo že prochází daným bodem. Různou kombinací těchto tří podmínek dostáváme celou sadu úloh. Některé Appoloniovy úlohy, které by jinak bylo velmi obtížné řešit, lze šikovně vyřešit užitím kruhové inverze. Zkusme například sestrojit kružnici dotýkající se dvou daných kružnic a procházející daným bodem (neležícím na žádné z kružnic). Provedeme kruhovou inverzi se středem v daném bodě. Při ní přejdou dané kružnice v kružnice (neboť neprocházejí středem kruhové inverze), hledaná kružnice přejde v přímku, jejich společnou tečnu. A tu už není velký problém zkonstruovat. Hledanou kružnici nyní dostaneme jako obraz nalezené tečny pomocí téže kruhové inverze. Využíváme toho, že dvojí provedení téže kruhové inverze je identita.

Všimněte si, že nezáleží na poloměru, s nímž inverzi provádíme. To je poměrně častý případ — jde nám jen o to, zda obraz bude přímka či kružnice, na jejich poloze a velikosti nezáleží.

Ještě jsme v řešení využili jednu podstatnou maličkost. Máme-li dán střed kruhové inverze S, kružnici k se středem v S a poloměrem r a bod X, musíme umět zkonstruovat obraz X' bodu X v kruhové inverzi podle kružnice k pomocí ***pravítka a kružítka***. To však není obtížné. Předpokládejme například, že X leží vně kružnice k. Sestrojíme-li l kružnici s průměrem SX, pak bod X' najdeme jako střed úsečky jejíž krajní body jsou průsečíky kružnic k a l. Případ, kdy X je uvnitř k jakož i ověření, že jsme skutečně dostali obraz bodu X v kruhové inverzi podle k přenechávám laskavému čtenáři.

Ptolemaiova nerovnost

Již jste se možná setkali s následující větou

Věta. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Označme (obvyklým způsobem) a, b, c, d délky jeho stran a e, f délky jeho úhlopříček. Pak platí

$$ac + bd \geq ef,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Existuje několik způsobů, často velmi těžkopádných, jak tuto větu dokázat. Pomocí kruhové inverze to však jde velmi snadno, vlastně to není nic jiného, než „kruhově zinvertovaná trojúhelníková nerovnost“. Na přednášce si ukážeme přesný postup.

Příklady

1. příklad Zkuste si promyslet řešení některých, popřípadě všech Appoloniových úloh.

2. příklad Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k, l o poloměrech r, s. Sestrojíme další dvě kružnice tak, aby se dotýkaly k i l a navíc sebe navzájem. Jaká je množina bodů, v nichž se takto vzniklé kružnice dotýkají? Jinak řečeno, když sestrojíme všechny takové dvojice kružnic, jaký útvar vytvoří jejich (vzájemné) dotykové body?

3. příklad Je dán pevný trojúhelník ABC, bod D probíhá stranu BC. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat úhel svíraný kružnicí opsanou $\triangle ABD$ a kružnicí opsanou $\triangle ACD$.

4. příklad Je dána kružnice k a bod B. Najděte kružnici, která prochází bodem B, protíná k pod daným úhlem α a je co nejmenší.

5. příklad V prostoru jsou dány koule k, l, m a to tak, že l, m leží uvnitř k, dotýkají se jí a dotýkají se navzájem. Sestrojíme kouli ϱ, která se dotýká k, l i m. Najděte množinu dotykových bodů ϱ a k.

6. příklad Nechť kružnice k_1, k_2 a k_3 procházejí společným bodem T, žádné dvě se nedotýkají. Buď A průsečík k_1 a k_2, B průsečík k_1 a k_3, C průsečík k_2 a k_3 (všechny různé od T). Dále buď A_1 průsečík přímky AT s kružnicí k_3 (různý od T), podobně jsou definovány body B_1 a C_1. Dokažte, že platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

7. příklad Nechť body A, B, C leží (v tomto pořadí) na přímce p a nechť bod D neleží na přímce p. Buď S střed kružnice opsané trojúhelníku ACD a T střed kružnice opsané trojúhelníku BCD. Dokažte, že $|\angle DAS| = |\angle DBT|$.

8. příklad V rovině jsou kružnice $k_1, \ldots, k_4, l$ tak, že
(1) k_i se dotýká l v bodě A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), A_i jsou po dvou různé
(2) k_1 se dotýká k_2, k_2 se dotýká k_3 a k_3 se dotýká k_4 (všechny doteky jsou vnější)

Bod, který je na kružnici l naproti A_1 označíme B, tečnu k l v B nazvěme b. Průsečíky přímky b a A_1A_i označme B_i ($i = 2, 3, 4$).

Kružnice k_1, k_4 a l jsou pevné, k_2 a k_3 se mění (při zachování výše uvedených pravidel). Ukažte, že poměr $|B_2B_3| \,/\, |B_3B_4|$ nezávisí na volbě k_2 a k_3.

9. příklad Máme dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníka takový, že platí $|AC|\,|BD| = |AD|\,|BC|$ a $|\angle ADB| = |\angle ACB| + 90°$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB|\,|CD|}{|AC|\,|BD|}.$$