Kruhová inverze

Martin Tancer

Při řešení úloh z geometrie se občas vyplatí použít nějaké zobrazení (středová souměrnost, osová souměrnost, otočení, stejnolehlost), které občas danou úlohu o něco zjednoduší. Jedním z takových zobrazení je díky svým vlastnostem i kruhová inverze.

Definice. *Rozšířenou rovinou (prostorem) rozumějme rovinu (prostor) sjednocenou s (jediným!) bodem ∞. Tento bod přidáváme, aby se nám podařilo lépe formulovat vlastnosti kruhové inverze. Navíc řekněme, že bod ∞ leží na každé přímce a neleží na žádné kružnici.*

Definice. *Kruhovou inverzí se středem v bodě X a poloměrem $r > 0$ nazveme zobrazení z rozšířené roviny (prostoru) do rozšířené roviny (prostoru) definované následovně:*
1) Bod X se zobrazí na bod ∞.
2) Bod ∞ se zobrazí na bod X.
3) Bod Y, $X \neq Y \neq \infty$, se zobrazí na Y' na polopřímce XY tak, že $|XY'| = \frac{r^2}{|XY|}$.

Říkejme, že (kruhově) invertujeme podle kružnice k (se středem X a poloměrem r). Pokud nám nezáleží na velikosti poloměru, říkejme, že invertujeme podle bodu X. Občas budeme za kruhovou inverzi považovat i zobrazení, které splňuje třetí vlastnost, ale nevšímá si bodu X a ∞ (tyto body nemusí vůbec existovat).

Věta. (Základní vlastnosti kruhové inverze) *Mějme inverzi se středem v X a poloměrem r, kružnici se středem X a poloměrem r označme k. Potom platí:*
(1) *Dvojí použití inverze je identita.*
(2) *Kružnice k se zobrazuje na sebe.*
(3) *Vnitřek kružnice k se zobrazuje vně kružnice k a naopak vnějšek dovnitř.*
(4) *Přímka procházející bodem X se zobrazuje na sebe.*
(5) *Přímka neprocházející bodem X se zobrazuje na kružnici procházející bodem X a naopak kružnice procházející bodem X na přímku neprocházející X.*
(6) *Kružnice neprocházející bodem X se zobrazuje na kružnici neprocházející X.*
(7) *Úhly mezi křivkami se při použití kruhové inverze zachovávají.*

Lemma. (Přepočítávací lemma) *Mějme inverzi se středem v X a poloměrem r. Nechť se body Y, Z; $Y, Z \neq X, \infty$ zobrazí na body Y', Z'. Potom*

$$|Y'Z'| = |YZ|\frac{r^2}{|ZX||YX|}.$$

Pozorování. V předchozím lemma můžeme čárkované a nečárkované body prohodit.

Věta. (Ptolemaiova nerovnost) *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v rovině, potom*

$$|AC||BD| \leq |AB||CD| + |AD||BC|.$$

Rovnost nastává, právě když body A, B, C, D leží v tomto pořadí na kružnici.

Pozorování. Mějme inverzi se středem v X a poloměrem r, kružnici se středem X a poloměrem r označme k. Kružnice $l \neq k$ je samodružná, právě když je kolmá na k, tj. protíná k a tečny v jednom (a pak i druhém) ze společných průsečíků svírají pravý úhel.

Pozorování. V trojúhelníku ABC označme P, Q, R body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB. Kruhová inverze podle kružnice vepsané pak zobrazuje body A, B, C po řadě na středy úseček QR, PR, PQ.

Pozorování. V komplexní rovině je zobrazení $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ kruhovou inverzí se středem v bodě 0 a poloměrem 1.

Příklady

Příklad 1. Nechť se kružnice k, l se středy S, T protínají ve dvou různých bodech A, B. Nechť přímka AS protíná l v bodě $C \neq A$. Nechť přímka AT protíná k v bodě $D \neq A$. Dokažte, že přímka AB prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ACD.

Příklad 2. Jsou dány tři různé body A, B, C. Uvažujme všechny dvojice kružnic k, l takové, že k prochází body A, B, dále l prochází body B, C a tečny kružnic k a l v bodě B jsou na sebe kolmé. Najděte množinu průsečíků (různých od B) všech možných takových dvojic k a l.

Příklad 3. Sestrojte kružnici dotýkající se tří daných objektů, kterými mohou být bod, přímka nebo kružnice.

Příklad 4. Nechť je pevně dána kružnice k se středem S a poloměrem r a nechť je pevně dán bod U. Uvažujme libovolnou kružnici l, která prochází body S a U a protíná k ve dvou bodech A_l, B_l. Jakých hodnot může nabývat součin $|UA_l||UB_l|$?

Příklad 5. Nechť se kružnice k_1, k_2 protínají v bodech U a V. Nechť P je bod na k_1 uvnitř k_2 a Q bod na k_2 uvnitř k_1. Přímka UP protíná k_2 v $R \neq U$ a UQ protíná k_1 v $S \neq U$. Označme $T \neq U$ průsečík UV s kružnicí opsanou UPQ. Dokažte, že $|PR||QT| = |PT||QS|$.

Příklad 6. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a uvnitř jeho stran AC, BC po řadě body D, E. Dokažte, že paty výšek z bodu C na přímky AB, AE, BD, DE leží na jedné kružnici.

Příklad 7. Nechť je dán trojúhelník ABC. Označme S střed vepsané kružnice l a označme po řadě P, Q, R body dotyku l se stranami BC, AC, AB. Dále označme k

kružnici opsanou středům stran PQR, $X \neq S$ průsečík přímky CS a kružnice opsané ABC a Y průsečík úsečky SX a k. Nakonec označme Z průsečík k a kolmice k CX procházející Y. Dokažte, že se přímka XZ dotýká k.

Příklad 8. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík tečen ke k v bodech B a D leží na přímce AC, právě když $|AB||CD| = |AD||BC|$.

Příklad 9. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníku takový, že $|AC||BD| = |AD||BC|$ a $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB||CD|}{|AC||BD|}.$$