Kruhová inverze

Michal Rolínek

Kruhová inverze je bezesporu jednou z nejzajímavějších partií rovinné geometrie. Není se čemu divit. Kdo by nebyl okouzlen tím, jak přímky přecházejí v kružnice a kružnice v přímky, jak se body přesouvají do nekonečna a zpátky a také tím, jak mocnou zbraní při řešení úloh může být toto exotické zobrazení. Než se naplno pustíme do tajů a krás kruhové inverze zavedeme si pár pojmů.

Definice. *Ke všem bodům roviny, které známe, přidáme ještě bod ∞ a tvrdíme, že jím procházejí všechny přímky.*

Najednou nemůžeme říct, že přímka nemá konec. Všimni si, že už tady se rozdíl mezi přímkou a kružnicí začíná stírat.

Úmluva. Aby se nám usnadnilo vyjadřování, budeme přímkám a kružnicím říkat souhrnně kruhové křivky.

Co je kruhová inverze?

Definice. *Kruhová inverze je zobrazení, které bodům roviny přiřazuje opět body roviny, a to následujícím způsobem. Nechť je dána kružnice $i(I, r)$, bodu X z naší roviny přiřadíme bod X' na polopřímce SX tak, aby platilo:*

$$|XI||X'I| = r^2$$

Speciálně $I \longrightarrow \infty, \infty \longrightarrow I$. Kružnici i budeme říkat inverzní kružnice a bodu I střed inverze.

Vlastnosti kruhové inverze

Pozorování. Body, které ležely uvnitř kružnice I se zobrazí ven a naopak.

Pozorování. Dvakrát provedená inverze podle stejné inverzní kružnice je identita.

Problém. Jak kružítkem a pravítkem zkonstruovat obraz bodu X v dané kruhové inverzi? (Nápověda: Vzpomeň si na Euklidovy věty)

Kruhová inverze není shodné ani podobné zobrazení. Přesto však je možné vyjádřit vzdálenost obrazů dvou bodů pomocí vzdálenosti vzorů a parametrů inverze.

Máme-li body X, Y a jejich obrazy X',Y' v kruhové inverzi podle $i(I, r)$. Platí

$$|X'Y'| = |XY| \frac{r^2}{|SX||SY|}$$

Tvrzení. (Nejdůležitější) Obrazem kruhové křivky je v kruhové inverzi opět kruhová křivka.

Poznámka. Pozor! Kruhová inverze sice docela často zobrazuje kružnice na kružnice, ovšem obecně neplatí, že by se na sebe zobrazily i jejich středy.

Cvičení. Určete množinu všech samodružných bodů, přímek a kružnic v kruhové inverzi.

Cvičení. Co se stane s rovnostranným trojúhelníkem, pokud ho zinvertujeme podle jeho opsané kružnice?

Cvičení. Co se stane se čtvercem zinvertujeme-li ho (i s úhlopříčkami) tentokrát podle kružnice vepsané?

Poznámka. Kruhová inverze také zachovává úhly mezi křivkami. Co přesně to znamená, si vysvětlíme na přednášce.

Konstrukční úlohy řešené pomocí kruhové inverze

Nyní si poprvé ukážeme, jak nám kruhová inverze může usnadnit práci v jinak obtížných či neřešitelných úlohách. Nejprve to budou úlohy konstrukční. S kruhovou inverzí nejvíce souvisí takzvané Apollóniovy úlohy. To jsou úlohy, ve kterých je úkolem zkonstruovat kružnici, která by se dotýkala tří zadaných prvků (mohou jimi být bod, přímka, či jiná kružnice). Například Apollóniova úloha bkk tedy zní: Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a dotýká se dvou daných kružnic. Na přednášce všechny Apollóniovy úlohy vyřešíme (samozřejmě s využitím kruhové inverze).

Příklad. (Úloha navrhovaná na IMO 1985) Je dán $\triangle ABC$, zkonstruuj uvnitř ABC bod D, tak aby trojúhelníky ABD, ACD, BCD měly stejný obvod.

Důkazové úlohy řešené pomocí kruhové inverze

Dosud se kruhová inverze mohla zdát jako zajímavý, avšak ne moc užitečný výstřelek. Nyní si však kruhovou inverzi představíme jako silný nástroj při řešení úloh z geometrie podobných těm z MO. Její použití je často velmi nečekané. Není žádný univerzální návod, jak poznat, které úlohy se dají pomocí kruhové inverze řešit, pouze několik obecných doporučení, které si povíme na přednášce.

Příklad 1. Jsou dány kružnice k_1,k_2,k_3 a k_4 takové, že k_2 a k_4 se obě dotýkají k_1 i k_3. Dokažte, že body dotyku leží na jedné kružnici.

Příklad 2. Dokažte Ptolemaiovu nerovnost. Ta říká, že pro každý čtyřúhelník $ABCD$ (s obvykle značenými délkami stran a, b, c, d a úhlopříčkami e, f) platí $ac + bd \geq ef$ s rovností právě pro tětivový čtyřúhelník.

Příklad 3. (Rakousko-polské střetnutí 1998) Přímky p a q se protínají v bodě P. Přímka p je společnou tečnou kružnic k_1 a k_2, které mají vnější dotyk v bodě P a přímka q je společnou tečnou kružnic l_1 a l_2, které se též zvenčí dotýkají v bodě P. Dokažte, že zbylé průsečíky kružnic k_1, k_2, l_1 a l_2 leží na jedné kružnici, právě když $p \perp q$.

Příklad 4. (Úloha navrhovaná na IMO 2003) Mějme opět bod P jako vnější bod dotyku kružnic k_1 a k_3 a kružnic k_2 a k_4. Zbylé průsečíky kružnic ($k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ …) označme po řadě A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

Příklad 5. (IMO 1996) Nechť P je bod uvnitř $\triangle\ ABC$ takový, že $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že osy úhlů ABP a ACP protínají přímku AP v jednom bodě.

Příklad 6. Mějme půlkružnici k s průměrem PQ a kružnici l, která má vnitřní dotyk s k a dotýká se úsečky PQ v bodě C. Sestrojme tečnu ke kružnici l, která je kolmá na PQ a označme postupně A, B její průsečíky s k a s úsečkou CQ. Dokažte, že AC je osou úhlu PAB.

Příklad 7. Označme p polovinu obvodu $\triangle ABC$. Na přímce AB nalezneme body E, F, tak aby platilo $|CE| = |CF| = p$. Dokažte, že kružnice opsaná $\triangle EFC$ se dotýká kružnice připsané $\triangle ABC$ ke straně AB.

Příklad 8. Dokažte, že kružnice devíti bodů se dotýká kružnice vepsané i všech kružnic připsaných.

Příklad 9. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se dotýká stran AB, BC, CA postupně v bodech K, L a M. Dokažte, že střed kružnice opsané a střed kružnice vepsané $\triangle ABC$, ortocentrum $\triangle KLM$ leží v přímce.

Příklad 10. Máme dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníka takový, že platí $|AC||BD| = |AD||BC|$ a $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90^\circ$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB||CD|}{|AC||BD|}.$$