Křivky

Jaroslav Hančl

Přednáška bude povětšinou teoretická. Nejprve seznámím posluchače se základními pojmy týkající se křivek, v druhé části budeme studovat konkrétní křivky jako spirály, cykloidy, řetězovky apod. Neděste se však těchto pojmů, jejich vlastnosti Vás nadchnou natolik, že si je možná i zapamatujete.

Co je to křivka

Křivka se dá jednoduše laicky popsat jako čára, při níž nezvednete tužku z papíru. Trochu zamyšlení už vyžaduje následující formální definice:

Definice. *Mějme interval $I \subset \mathbb{R}$. Poté parametrizovanou křivku definujeme jako diferencovatelné zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ Tuto křivku nazveme regulární, jestliže $\forall t \in I$ je $\varphi'(t) \neq 0$.*

Matematický zápis se dá provést třemi způsoby. Například jednotkovou kružnici jimi lze popsat jako

- množina bodů
$$\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\},$$
- graf funkce
$$y = \sqrt{1 - x^2} \ \cup \ y = -\sqrt{1 - x^2},$$
- dráha bodu
$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \in [0, 2\pi].$$

My většinou budeme využívat parametrizaci křivky jakožto dráhy bodu nebo budeme znát rovnici ji popisující. V souvislosti s křivkami zavedeme ještě několik důležitých pojmů. Jejich formální definice jsou složité, a tak se je pokusíme popsat jejich geometrickou interpretací.

- *Tečna křivky v bodě x* je přímka, která se v daném bodě x křivky pouze dotýká.
- *Normála křivky v bodě x* je kolmice na tečnu procházející x.
- *Odchylka dvou křivek* je odchylka jejich tečen v bodě průniku.
- *Délku křivky* získáme, když křivým metrem změříme její délku.
- *Křivost křivky v bodě* znamená, jak moc křivka v bodě zatáčí.

Významné křivky

Křivek v rovině je spousta. V podstatě, když nakreslíte nějakou čáru a pak ji popíšete rovnicemi, můžete ji prohlásit za svou křivku. Připravené křivky jsem rozdělil do 4 skupinek:

Spirály

- *Archimédova spirála* je dráha bodu pohybujícího se rovnoměrně po polopřímce, která se rovnoměrně otáčí kolem svého počátečního bodu.
- *Logaritmická spirála* má rovnici $r = ac^t$, kde $t \in \mathbb{R}$, a, c jsou reálné parametry.
- *Fermatova spirála* je složením dvou křivek s rovnicemi $r = \pm\sqrt{t}$, $t \in \mathbb{R}$.
- *Hyperbolická spirála* je dána rovnicí $r = \frac{a}{t}$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- *Šroubovice* je prostorová křivka popsána parametricky vektorem

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Cykloidy

- *Cykloida* je křivka, kterou opisuje bod ležící na kružnici kutálející se po přímce.
- *Hypocykloida* je dráha, kterou opisuje bod na kružnici, která se valí po vnitřní stěně nějaké větší kružnice. Pro různé poměry poloměrů kružnic dostáváme křivky jménem *Asteroida* a *Deltoida.*
- *Epicykloida* je křivka, kterou opisuje bod na kružnici, která se valí po vnější stěně pevné kružnice. Jakožto speciální případ dostaneme *Kardioidu.*
- *Epitrochida* je křivka, kterou opisuje pevný bod uvnitř kružnice, která se valí po vnější stěně pevně zadané kružnice.

Zbytek

Tak jako parabola je složena z bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou ohnisek, *Cassiniho ovál* je množina bodů, které mají konstantní součin vzdáleností od dvou ohnisek. Jeho speciální případ je *Bernouliho Lemniskáta*, která má předpis

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Další používanou křivkou je *Řetězovka.* Tato křivka popisuje tvar lana prověšeného mezi dvěma pevnými body a je popsána rovnicí

$$y = cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

A nakonec se zmíníme ještě o jedné důležité křivce s názvem *Evolventa.* Evolventou křivky nazveme dráhu pevně zvoleného bodu na přímce, která se valí po dané křivce.

Zajímavé křivky

Zde jsou uvedeny jen křivky, které nemají nijaký valný význam, ale jejich grafy jsou pěkné.

- *Prvočíselná spirála,*
- *křivka Ampersand,*
- *Ďáblova křivka,*
- *Wattova křivka.*

Příklady

Příklad 1. Mějme dvě mince na sobě položené (dvě kružnice v rovině s vnějším dotykem). Jednu minci zafixujeme a druhou budeme valit po jejím povrchu. Kolikrát se pohybující se mince otočí, než se dostane do počáteční polohy?

Příklad 2. Tipněte si, kolik je délka asteroidy, která je vepsána do kružnice o poloměru R.

Příklad 3. Jak se bude měnit úhel, který svírá tečna šroubovice v bodě t s podstavou, bude-li bod t postupně probíhat celou šroubovici?

Příklad 4. Jaká křivka vznikne, budeme-li řezat torus (ringo kroužek) rovinou tak, aby se řez skládal ze dvou částí spojených jedním bodem?

Příklad 5. Jakou křivku představuje most Tower Bridge v Londýně?

Příklad 6. Jaký vztah má křivka s evolventou své evolventy?