Kreslení grafů na plochy

Tomáš Novotný

Abstrakt. V první části příspěvku si vysvětlíme základní pojmy týkající se ploch. Dále si ukážeme a procvičíme možné způsoby jejich zobrazování do roviny, abychom na ně následně v druhé části příspěvku mohli kreslit grafy, a ukážeme si, co takové grafy musí splňovat.

Úvod

Jistě jste se už v životě mnohokrát setkali s grafem, například odpovídajícím silniční síti. Pokud jste ovšem potřebovali nakreslit složitější graf, jistě jste si všimli, že ne vždy ho lze nakreslit tak, aby se jeho hrany nikde nekřížily – z tohoto důvodu je třeba stavět na silnicích různé tunely a mosty. Ukážeme si, že kdyby Země nebyla kulatá, ale například měla tvar toru, tak bychom na ní mohli postavit některé silniční sítě, které na kouli bez mostů postavit nelze.

Pro úplnost nejprve definujme, čím je graf ve smyslu teorie grafů:

Definice. *Graf* $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice množin vrcholů a hran

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, E \subseteq \binom{V}{2},$$

kde $\binom{V}{2}$ značí všechny dvojice navzájem různých vrcholů z V, neboli všechny možné hrany. Řekneme, že graf na $|V| = n$ vrcholech je *úplný* (značený K_n), pokud $E = \binom{V}{2}$.

Ukážeme si, že grafy na rovinu nenakreslitelné bez křížení hran lze mnohdy nakreslit na jiné plochy, například torus či Kleinovu láhev.

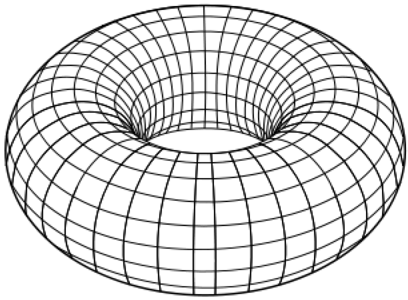
Co to vlastně je ta plocha?

Jelikož plochy mohou vypadat velmi různorodě (například povrch hrníčku, ale třeba i tohoto sborníčku), jejich matematický popis je poměrně složitý. Pro zajímavost, jedna z možných definic je následující:

Definice. *Plocha* Γ je souvislá kompaktní množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že pro každé $y \in X$ existuje otevřené okolí y takové, že jeho průnik s X je homeomorfní otevřenému kruhu v $\mathbb{R}^2$.

Definice ve skutečnosti pouze říká, že *plocha* vypadá „rozumně“, tj. je konečně velká, mezi každými jejími dvěma body vede cesta a neobsahuje žádné „díry“ či okraj. Pojem *homeomorfní* ještě později použijeme, v podstatě platí, že A je *homeomorfní* s B právě tehdy, když lze A zdeformovat tak, že vznikne B (a také B lze zdeformovat na A).

Mezi plochy řadíme například sféru či torus (na obrázku), ovšem rovina či uzavřený čtverec plochami nejsou (rovina není konečná, tudíž ani kompaktní, naopak bod na okraji čtverce nemá okolí homeomorfní otevřenému kruhu). Přesto jsme za pomoci malého triku schopni všechny plochy nakreslit na papír.



Zobrazování ploch do roviny

Nejprve si ukážeme, že platí následující tvrzení:

Tvrzení. *Každý graf, který lze nakreslit na sféru, lze nakreslit i do roviny.*

Důkaz. Stačí, když si zvolíme nějaký bod na sféře, který není vrcholem ani není na hraně grafu, sféru „položíme“ na rovinu s tímto bodem x_0 nahoře a poté každý bod $x \neq x_0$ sféry zobrazíme na takový bod roviny, kde ji protne přímka x_0x.

Cvičení. (motivační) Představte si, že na celé Zemi (předpokládejte, že má tvar dokonalé koule) se vyskytují právě tři domy a tři studny. Postavte cesty mezi každým domem a studnou tak, aby se vzájemně neprotínaly.

Ukážeme si (neformálně) dvě operace, jak kreslit různé plochy na papír, a také pro vzniklé plochy definujeme jejich tzv. Eulerovu charakteristiku χ.

Definice. *Přidání ucha* provedeme tak, že z papíru „vyřízneme“ dva kruhy a body na jejich okrajích v opačných orientacích ztotožníme. *Přidání křižítka* provedeme tak, že „vyřízneme“ pouze jeden kruh a ztotožníme protější body na jeho okraji.

Definice. *Eulerova charakteristika* χ plochy Γ vzniklé ze sféry přidáním u uší a k křižítek je

$$\chi = 2 - 2u - k.$$

Jako cvičení si můžete rozmyslet, že po přidání ucha či křižítka nám zůstane plocha. Ovšem platí dokonce následující věta:

Věta. *Každou plochu lze vytvořit ze sféry přidáním nějakého počtu u uší a k křižítek. Pokud $k = 0$, nazývá se tato plocha neorientovatelná a značí se Σ_u. Pokud $k > 0$, nazývá se tato plocha orientovatelná, je homeomorfní ploše vzniklé ze sféry přidáním právě $n = 2u + k$ křižítek a značí se Π_n.*

A kde vlastně jsou ty grafy?

Nyní máme připraveno vše, abychom mohli začít kreslit grafy na naše vytvořené plochy. Pro úplnost začněme definicí nakreslení grafu:

Definice. Nakreslení grafu $G = (V, E)$ na plochu Γ je takové zobrazení, kde všechny vrcholy z G jsou zobrazeny na různé body Γ a všechny hrany z G na neprotínající se křivky.

Pokud jste zkoušeli vyřešit motivační cvičení výše, nejspíše jste zjistili, že úloha bez použití „mostů" vyřešit nelze. Nicméně nemusíme zoufat, neboť platí:

Tvrzení. *Každý graf lze nakreslit na sféru s přidáním dostatečného počtu uší.*

Důkaz. Důkaz je velmi snadný, stačí zadaný graf „skoronakreslit" (povolíme protínání jeho hran) na sféru a poté na každé místo, kde se nějaké dvě hrany kříží, přidáme ucho jako „most", přes který jednu z nich převedeme. Takto sice můžeme přidat velké množství uší, ale na vzniklou plochu již zadaný graf nakreslit lze. □

Cvičení. Ukažte, že každý graf lze nakreslit na sféru s přidáním dostatečného počtu křižítek.

Problémem předchozího tvrzení je fakt, že uší (či křižítek) je někdy třeba přidat mnoho. Pokud ovšem dostaneme zadanou plochu, tak si ukážeme, že grafy nakreslitelné na tuto plochu jsou poměrně omezené. Konkrétně si postupně dokážeme následující „magické" tvrzení:

Tvrzení. (magické) *V každém grafu nakresleném na plochu charakteristiky χ různou od sféry existuje vrchol stupně nejvýše*

$$\left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor.$$

Byť toto tvrzení může vypadat velmi pokročile, uvidíme, že s využitím znalosti *Zobecněné Eulerovy formule* není její důkaz příliš obtížný.

Věta. (Eulerova formule) *Pro každý rovinný graf obsahující s stěn platí:*

$$|V| - |E| + s \geq 2,$$

přičemž pokud je graf souvislý, platí rovnost.

Můžete si zkusit tuto větu dokázat (Hint: uvědomte si, že věta platí pro stromy, a pak použijte indukci podle hran). Pro nás je ovšem důležitá její zobecněná verze:

Věta. (Zobecněná Eulerova formule) *Pro každý graf nakreslený na plochu s charakteristikou χ obsahující s stěn platí následující nerovnost:*

$$|V| - |E| + s \geq \chi.$$

Byť to tak na první pohled nevypadá, s touto znalostí už lze „magické“ tvrzení pomocí několika lehčích úvah dokázat. Nejprve si uvědomme, že každá stěna má na svém obvodu alespoň tři hrany a také každá hrana sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Tudíž

$$s \leq \frac{2|E|}{3}.$$

Když tuto nerovnost dosadíme do Zobecněné Eulerovy formule, dostaneme:

$$\begin{aligned} |V| - \frac{|E|}{3} &\geq \chi \\ \frac{6|V|}{|V|} - \frac{2|E|}{|V|} &\geq \frac{6\chi}{|V|} \\ \frac{2|E|}{|V|} &\leq 6 - \frac{6\chi}{|V|} \end{aligned}$$

Jelikož $\frac{2|E|}{|V|}$ je průměrný stupeň vrcholu grafu, víme, že existuje vrchol stupně nejvýše $6 - \frac{6\chi}{|V|}$. Tudíž pro každý graf na ploše s kladnou charakteristikou (tj. sféra a projektivní rovina) existuje vrchol stupně nejvýše pět, takže projektivní rovina splňuje *magické* tvrzení. Navíc pokud má graf n vrcholů, tak zřejmě všechny jeho vrcholy mají stupeň nejvýše $n - 1$.

Nyní si stačí všimnout, že pro $\chi \leq 0$ je funkce $f(x) = 6 - \frac{6\chi}{x}$ pro $x > 0$ nerostoucí, naopak $g(x) = x - 1$ je zjevně rostoucí. Tudíž pokud nalezneme průsečík těchto funkcí, zjistíme maximální možný průměrný stupeň grafu, který lze na odpovídající plochu nakreslit:

$$\begin{aligned} 6 - \frac{6\chi}{x} &= x - 1 \\ x^2 - 7x + 6\chi &= 0 \\ \left(x - \frac{7 - \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož je $\chi \leq 0$, tak $\sqrt{49 - 24\chi} \geq 7$, tudíž první závorka součinu nesplňuje $x > 0$. Ovšem z druhé závorky přímo plyne, že pro průměrný stupeň p libovolného grafu platí

$$p \leq \left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor,$$

což je ovšem přesně naše „magické“ tvrzení!

Cvičení.

(1) Zkuste nakreslit co největší úplný graf na torus.

(2) Zkuste nakreslit co největší úplný graf na Kleinovu láhev.

Ve skutečnosti lze na každou plochu nakreslit úplný graf s právě $\left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor + 1$ vrcholy, ovšem s výjimkou Kleinovy láhve. Předchozí cvičení byl tedy trochu chyták, neboť byť mají torus i Kleinova láhev stejnou charakteristiku, na torus lze nakreslit K_7, ovšem na Kleinovu láhev bohužel ne.

Barevný závěr

Když už víme, jak mohou (a nemohou) vypadat grafy nakreslené na různé plochy, můžeme se ptát, kolik různých barev musíme použít na obarvení jejich vrcholů tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Ukážeme, že platí následující věta.

Věta. (Heawoodova formule) *Každý graf nakreslený na plochu s charakteristikou χ lze obarvit pomocí*

$$k = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor \qquad \textit{barev.}$$

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje graf, který pomocí tohoto počtu barev obarvit nelze, a vyberme takový, který má co nejméně vrcholů. Označme ho G. Využijeme naše magické tvrzení – víme, že v libovolném grafu nakresleném na této ploše najdeme vrchol stupně nejvýše

$$\left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor = k-1,$$

tudíž pokud tento vrchol z G „odtrhneme“, dostaneme opět graf nakreslený na této ploše. Ovšem ten má méně vrcholů, tudíž ho lze tímto počtem barev obarvit.

Vezměme tedy nějaké jeho obarvení a vraťme zpět „odtrhnutý“ vrchol. Ten má ale nejvýše $k-1$ sousedů, tudíž na něj zbyla alespoň 1 barva, kterou ho můžeme obarvit, čímž dostaneme korektní obarvení G, což je spor s předpokladem. □

Tento odhad je navíc těsný pro všechny plochy kromě Kleinovy láhve, u které nám na obarvení libovolného grafu stačí 6 barev. Když se tedy podíváme na sféru, tak po dosazení dostaneme, že každý graf na ní lze obarvit

$$\frac{7+\sqrt{49-24\cdot 2}}{2} = 4$$

barvami. Ale jelikož každý graf je rovinný právě tehdy, když lze nakreslit na sféru, tak jsme takto dokázali, že každý rovinný graf lze obarvit pomocí čtyř barev!

Tedy skoro…

Literatura a zdroje

[1] Zápisky z předmětu *Kombinatorika a grafy II* na MFF UK,

[2] Peter Korcsok, *Grafity v metre*, Sborník MKS, Mentaurov, 2013.