Konvexita – k čemu to je?

Michal Kubeček

Pojem *konvexní množiny* se zavádí už kdesi na prvním stupni základní školy. V učebnicích se ale obvykle nemluví o tom, k čemu je vlastně takový pojem užitečný. Přednáška má za cíl tuto chybu alespoň částečně napravit.

Symbolem $\mathbb{R}^n$ budeme označovat prostor dimenze n; kdo neoplývá dostatkem fantazie, může se omezit na speciální případy $n = 2$ (rovina) a $n = 3$ (třírozměrný prostor (to je ten, ve kterém žijeme)).

Hellyho věta

Hellyho věta má mnoho různě složitých variant, všechny ale mají podobný smysl, který je patrný už z té první, nejjednodušší.

Věta. *Mějme v rovině dány konvexní množiny A_1, A_2, A_3, A_4 tak, že každé tři z nich mají neprázdný průnik. Potom všechny čtyři mají neprázdný průnik.*

Podotkněme jenom, že požadavek konvexity je zcela podstatný. Příklad ukazuje obrázek 1, kde každé tři množiny mají společný bod, ale neexistuje bod, který by ležel ve všech čtyřech. Podobně nelze omezit předpoklad, že každé tři množiny mají neprázdný průnik – představíme-li si strany trojúhelníka, mají každé dvě neprázdný průnik, všechny tři však nikoli. Směrem nahoru ale indukcí postupovat lze, a tak dostaneme první zobecnění:

Věta. *Mějme v rovině dáno konečně mnoho konvexních množin takových, že každá trojice má neprázdný průnik. Pak mají všechny neprázdný průnik.*

Bohužel se ukazuje, že bez dodatečných opatření nelze odstranit předpoklad, že množin je jen konečně mnoho. Představme si posloupnost pravých polorovin omezených „postupně ubíhajícími“ přímkami tak, jak je to nakresleno na obrázku 2. Podobný příklad snadno nalezneme i pro omezené množiny (uvažujme $A_n = (0, 1/n) \times (0, 1)$ v rovině).

Naštěstí se zde můžeme opřít o tvrzení z topologie, které říká, že máme-li dán v $\mathbb{R}^n$ systém (libovolně mnoha) omezených uzavřených množin tak, že ke každému výběru konečně mnoha z nich najdeme společný bod, pak existuje bod, který leží ve všech. Podobnost s Hellyho větou je velmi silná, obě věty se ale diametrálně liší. Zatímco tvrzení z topologie předpokládá jisté topologické vlastnosti množin a nezávisí na jejich geometrických vlastnostech (tvaru), u konečné Hellyho věty je tomu přesně naopak. Složíme-li obě věty dohromady, dostaneme, že předpoklad konečného počtu