Konečné součty

Pavel Šalom

V zásadě existují dva typy součtů – konečné a nekonečné. Těmi nekonečnými se zabývat nebudeme, protože je k jejich výpočtu potřeba znát a umět pracovat s limitou. Přesto se však i při jejich zkoumání uplatňují někdy podobné metody, jaké si ukážeme při výpočtech konečných součtů. Dá se říci, že i konečné součty můžeme rozdělit na dva typy, a to takové, které jsme schopni vždy standardními metodami spočítat a takové, pro něž neexistuje jednoznačný recept. Potom nezbývá, než zkoušet vše možné i nemožné, přemýšlet, bloumat, lámat tužky a někdy si raději nechat poradit :)

Mezi první typ součtu patří například dobře známá aritmetická či geometrická posloupnost. Dále k nim patří součty $S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Dokonce jsme schopni vždy spočítat každou sumu, jejíž i-tý člen je vyjádřený jako polynom v proměnné i. Kromě tohoto typu součtů zde patří ještě takové, které si nazveme aritmeticko-geometrické. Mezi ně patří například součet $q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n$, což je jakási smíchanina aritmetické a geometrické řady. Jeden z nejobecnějších součtů, které jsme schopni vždy spočítat má tvar

$$\sum_{i=1}^{n} P(i)q^i$$

kde $q \in R$, $P(i)$ je daný polynom libovolného stupně. Další typ součtu, který ještě jsme schopni rozumně spočítat, je tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} P(i)\binom{n}{i}$$

Existuje ještě několik dalších typů, u nichž jsme schopni obecné metody popsat, ale určitě tě samotného napadne další spousta, u nichž opravdu nejsme schopni najít žádné pěkné vyjádření, natož obecné postupy, přestože se součet samotný tváří velmi jednoduše. Například zkus $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nebo $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Jiná je situace při sčítání kombinatorických čísel, kde je sice známo mnoho identit, avšak podat obecnou metodu je téměř nemožné.

Nyní již k samotným výpočtům. Obecně uplatnitelné metody jsou

(i) Představit si daný součet v obráceném pořadí – aritmetická řada

(ii) Vhodně daný součet vynásobit – geometrická řada.

(iii) Tušit, v jakém tvaru by výsledek mohl vyjít, případně použít metodu neurčitých koeficientů a výsledek dokázat indukcí :)

(iv) Využít extrémně chytrých identit – součty S_k.

(v) Pokusit se každý člen vyjádřit jako rozdíl dvou podobně vypadajících členů například metodou rozkladu na parciální zlomky.
(vi) Zkusit odhadnout součet integrálem a poté se zabývat chybou.
(vii) Vhodné použití derivací.

Při počítání kombinatorických součtů se často využívá jiných postupů:

(vi) Pascalův trojúhelník.
(vii) Binomická věta.
(viii) Vytvořující funkce.
(ix) Komplexní čísla a Moivreova věta – nejen pro kombinatorické součty, ale třeba i součty $\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha)$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha)$, atd.
(x) Kombinatorická interpretace.

Metody i-v bychom si měli na přednášce ukázat a osvojit, další podle času.

Tvrzení. Pro polynomy $P(x)$, $Q(x)$ nastává rovnost $P(x) = Q(x)$ právě když se rovnají příslušné koeficienty u jednotlivých mocnin.

Tvrzení. Pro libovolná A, B reálná (i komplexní) je

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Věta. (Binomická) *Pro libovolná A, B reálná (i komplexní) je*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Tvrzení. (Pascalův trojúhelník) Pro nezáporná celá čísla $n \geq k$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Tvrzení. Buď $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$. Potom platí

$$S_{k+1}(n+1) - 1 = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} S_i(n)$$

Tvrzení. Buď $R_k = \sum_{i=1}^{n} i^k q^i$ pro nějaká n, $q \neq 1$ (případ $q = 1$ je obsažen v předchozím tvrzení). Potom platí

$$R_k = \frac{1}{q-1}\left[n^k q^{n+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} R_i\right]$$

Věta. *Buď $P(x)$ polynom stupně m. Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně $m+1$ takový, že pro všechna n platí*

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = Q(n)$$

Věta. *Buď $P(x)$ polynom stupně m, $q \neq 1$ (případ $q = 1$ je v předchozí větě). Pak existuje polynom $Q(x)$ stupně m a číslo d takové, že pro všechna n platí*

$$\sum_{i=1}^{n} P(i)q^i = d + Q(n)q^n$$

Příklady

Příklad 1. $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1}n$

Příklad 2. $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$

Příklad 3. $S = (x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + \cdots + (x^n + \frac{1}{x^n})^2$

Příklad 4. $S = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$

Příklad 5. $S = 1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}$

Příklad 6. $S = \frac{2^2}{2}\binom{n}{1} + \frac{2^3}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}$

Příklad 7. $S = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \cdots + \binom{m+n-1}{m}$

Příklad 8. Těžké $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, resp. $\binom{n}{0}\binom{m}{p} + \binom{n}{1}\binom{m}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p}\binom{m}{0} = $ $= \binom{m+n}{p}$

Příklad 9. $S = \frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!} + \frac{1}{5!(2n-5)!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!1!}$

Příklad 10. $S = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k+1) + \cdots + (n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+k-1)$

Příklad 11. Určete $R_1 = 1q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n$

Příklad 12. Určete $R_2 = 1^2q + 2^2q^2 + 3^2q^3 + \cdots + n^2q^n$

Příklad 13. $S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Příklad 14. $S = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Příklad 15. $S = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

Příklad 16.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Příklad 17. Těžké $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots = 2^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-2} \sin(\frac{n\pi}{4})$

Příklad 18. Těžké $\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \cdots = \frac{1}{3}\left[2^{n-1} + \cos(\frac{n\pi}{3} + (\sqrt{3})^{n} \cos(\frac{n\pi}{6})\right]$

Příklad 19. Těžké

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Příklad 20. Těžké

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \cos\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Příklad 21. Těžké

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(k\alpha)$$

Příklad 22. Těžké ($x \neq 0$)

$$\sum_{k=0}^{n} ke^{kx} = \frac{e^{x} - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x}}{(1-e^{x})^2}$$

Příklad 23. Těžké

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n = 0$$