Konečné součty

Martina Vaváčková

Konečnými součty rozumíme součty konečně mnoha sčítanců. Vedle konečných součtů existují i součty nekonečné, ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Některé konečné součty lze spočítat standardními metodami, jiné vyžadují jistou dávku invence. Samozřejmě ne vždy se dá součet zapsat v „pěkném“ tvaru – dokonce ani v případě, že se na první pohled tváří velmi jednoduše (například $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).

Nyní si přiblížíme několik postupů, jež se při sčítání řad mohou hodit:

(i) představíme si daný součet v obráceném pořadí – aritmetická řada,
(ii) vhodně součet vynásobíme a získanou rovnost odečteme od té původní – geometrická řada,
(iii) využijeme Pascalův trojúhelník, binomickou větu a jiné kombinatorické identity,
(iv) pokusíme se každý člen vyjádřit jako rozdíl dvou podobně vypadajících členů – teleskopická řada.

Tvrzení. (Pascalův trojúhelník) *Pro nezáporná celá čísla n, k ($n \geq k$) platí*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Věta. (Binomická) *Pro libovolná $A, B \in \mathbb{R}$ platí*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

speciálně $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Definice. Pro dané $k \in \mathbb{N}$ a $q \neq 0$ označme

$$R_{q,k}(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k q^i.$$

Dále definujme $S_k = R_{1,k}$, tedy S_k vyjadřuje součet k-tých mocnin prvních n přirozených čísel.

Tvrzení. *Pro libovolná q, k je možné řady S_k a $R_{q,k}$ sečíst. Přesněji, $R_{q,k}$ je vyjádřitelné jako $q^n P(n)$, kde P je polynom stupně k.*

Cvičení. Určete S_1, S_2, $R_{q,1}$.

Příklady

Příklad 1. $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1} n$

Příklad 2. $S = (x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + \cdots + (x^n + \frac{1}{x^n})^2$

Příklad 3. $S = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$

Příklad 4. $S = 1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} n\binom{n}{n}$

Příklad 5. $S = 1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}$

Příklad 6. $S = \frac{2^2}{2}\binom{n}{1} + \frac{2^3}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}$

Příklad 7. $S = \frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!} + \frac{1}{5!(2n-5)!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!1!}$

Příklad 8. $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Příklad 9. $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Příklad 10. $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Příklad 11.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Zdroje

[1] Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita v Brně, 2001

[2] Pavel Šalom: *Konečné součty* (Sborník MKS, Rapotín 2007)