Komplexní čísla

Honza Krejčí

Abstrakt. Co jsou to komplexní čísla? K čemu se používají? Dá se s nimi dělat něco cool? Na tyto a další otázky se na přednášce/v příspěvku pokusíme odpovědět.

Proč vznikla komplexní čísla? Podívejme se na polynomy s reálnými koeficienty. Ty jsou super, ale mají jednu nepříjemnou vlastnost – ne všechny jsme schopni zapsat jako součin polynomů stupně nejvýše jedna. To znamená, že dopředu třeba nevíme, kolik má polynom $x^8+5x^6+17x^2+349x+5$ kořenů. Nebo neumíme rozložit tak jednoduchý polynom jako x^2+1. Co s tím?

První případ vypadá dost komplikovaně, ve druhém by nám stačilo mít *číslo*, jehož druhá mocnina dává -1. Označme si takové číslo i, tj. $i^2=-1$. (Zřejmě, pokud takové číslo máme, pak číslo k němu opačné má stejnou vlastnost.) Nyní, abychom měli uzavřenost na operace sčítání a násobení, tak uvažujme všechna čísla tvaru $a+bi$, kde a, b jsou reálná, a označme tuto množinu $\mathbb{C}$. Pak se zmiňovaný polynom nad touto množinou rozkládá na součin $x^2+1=(x+i)(x-i)$. To není všechno – lze dokonce dokázat, že každý polynom nad $\mathbb{C}$ se rozkládá na součin polynomů stupně nejvýše jedna. Ukazuje se, že toto není jediná hezká vlastnost komplexních čísel. Mimo jiné se s nimi dají intuitivně odvodit zajímavé vzorce a (dokonce) mají praktické uplatnění v popisu geometrických zobrazení nebo také ve fyzice.

Úmluva. Dále v tomto textu předpokládáme, že a, b, c a d jsou reálná čísla a z je číslo komplexní.

Definice. (Komplexní číslo) Číslo $z=a+bi$, kde $i^2=-1$, budeme nazývat *komplexní číslo*, a nazveme *reálnou částí* komplexního čísla a b nazveme jeho *imaginární částí*. Značíme $\Re(z)=a$ a $\Im(z)=b$.

Věta. (Základní věta algebry) *Každý polynom nad komplexními čísly má kořen.*

Úloha. Jaký tvar má součin a součet čísel $a+bi$, $c+di$?

Různé tvary komplexních čísel

S komplexními čísly se dají provádět stejné věci jako s čísly reálnými, ale k některým z nich je právě definovaný tvar nevhodný.

Zřejmě, abychom jednoznačně zadali komplexní číslo, stačí nám uspořádaná dvojice reálných čísel. Dvojice se rovněž používají pro zadávání bodů v rovině – nebylo by možné si komplexní čísla představit jako body v rovině?

Definice. (Komplexní čísla podruhé) Komplexnímu číslu $a+bi$ přiřadíme v rovině bod se souřadnicemi $[a, b]$. Ose x budeme říkat *reálná osa* a ose y *imaginární*. Pro libovolné dva body v rovině se souřadnicemi $[a, b]$ a $[c, d]$ definujeme operace sčítání a násobení následovně:

- $[a, b] + [c, d] = [a + b, c + d]$,
- $[a, b] \cdot [c, d] = [ac - bd, ad + bc]$.

Nyní definujeme třetí tvar, tzn. *goniometrický*. Pro dané nenulové komplexní číslo $z = a + bi$ existuje právě jeden průsečík jednotkové kružnice se středem v počátku a polopřímky vycházející z počátku, která prochází bodem z. Bod na jednotkové kružnici jsme schopni reprezentovat dvojicí $[\cos\varphi, \sin\varphi]$ a délka úsečky spojující počátek se z je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Proto můžeme psát $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Definice. (Absolutní hodnota a argument komplexního čísla) Pro komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme:

- *Absolutní hodnota* komplexního čísla z je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *Argument* komplexního čísla z je číslo φ z rozmezí $[0, 2\pi)$ takové, že platí $z = |z| \cdot (cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Z hlediska geometrického si lze absolutní hodnotu představit jako délku úsečky spojující počátek s vybraným komplexním číslem. Argument je potom úhel, který tato úsečka svírá s kladnou částí reálné osy.

Úloha. Je přechod mezi základním tvarem komplexního čísla a goniometrickým tvarem jednoznačný, tj. je jednoznačné zobrazení, které komplexnímu číslu přiřadí dvojici absolutní hodnota a argument?

Úloha. Převeďte čísla $-2 - 2i$, $3 - i\sqrt{3}$, $-7 + 7i$ do goniometrického tvaru.

Je-li absolutní hodnota komplexního čísla rovna jedné, nazveme takové číslo *komplexní jednotka.*

Věta. (Součtové vzorce) *Pro a, b platí:*

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$,
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Z poslední definice a znalosti součtových vzorců si lze konečně představit, jak vypadá násobení komplexních čísel.

Mějme čísla $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Potom $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Tj. dostaneme číslo, které má argument roven součtu argumentů násobených čísel a jeho vzdálenost od počátku je rovna součinu vzdáleností násobených čísel.

Úloha. Jaká geometrická zobrazení jsou reprezentována:

- přenásobením $\pm i$?
- přenásobením komplexní jednotkou?
- přenásobením reálným číslem?
- přenásobením komplexním číslem?

Úloha. Popište zobrazení, které komplexnímu číslu přiřadí jeho absolutní hodnotu.

Věta. (Moivreova věta) *Pro a a celé číslo n platí následující rovnost:*

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

Důkaz. Pro $n \geq 0$ tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n za pomoci součtových vzorců. Je-li $n < 0$, pak z již dokázaného platí, že $(\cos a + i \sin a)^n = \frac{1}{(\cos a + i \sin a)^{-n}} = \frac{1}{\cos(-na) + i \sin(-na)}$. Dále přenásobíme zlomkem $\frac{\cos(-na) - i \sin(-na)}{\cos(-na) - i \sin(-na)}$. Tímto přenásobením nám stále zůstává zachována rovnost, neboť násobíme jedničkou. Nakonec si uvědomíme, že sinus je lichá funkce, kosinus sudá funkce a dostaneme $(\cos a + i \sin a)^n = \cos(-na) - i \sin(-na) = \cos na + i \sin na$. □

Základní operace s komplexními čísly

S reálnými čísly toho děláme spoustu, mimo jiné třeba dělíme, mocníme a odmocňujeme. Mocnit číslo $(-2-2i)^{42}$ nevypadá jako příjemná činnost, nicméně na mocnění (s celočíselným koeficientem) máme goniometrický tvar a Moivreovu větu. Vyjde-li nám čas, ukážeme si, jak umocnit nebo odmocnit (skoro) všechno za použití komplexní exponenciály a logaritmu.

Komplexní čísla jsou zákeřnější co se zlomků týče – jakou hodnotu má výraz $\frac{1+i}{1-i}$? Zkusme zlomek usměrnit tak, aby ve jmenovateli nebylo komplexní číslo (usměrníme číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli zlomku): $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = i$.

Definice. (komplexně sdružené číslo) Mějme $z = a + bi$, potom číslo *komplexně sdružené* je $\overline{z} = a - bi$.

Věta. (Vlastnosti komplexního sdružování) *Nechť z_1, z_2 jsou komplexní čísla a P polynom s reálnými koeficienty, potom:*

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{P(z_1)} = P(\overline{z_1})$.

Další problém, který s komplexními čísly máme, je, že neumíme spočítat druhou odmocninu. Zkusme (cvičně) spočítat odmocninu z čísla $5 + i\sqrt{11}$. Tato odmocnina bude komplexní číslo $a + bi$ pro vhodné konstanty a, b. Umocníme-li rovnici a porovnáme reálné a imaginární části, dostaneme pro ně tuto soustavu rovnic:

$$5 = a^2 - b^2$$
$$\sqrt{11} = 2ab$$

Soustavu můžeme vyřešit vyjádřením a z druhé rovnice, dosazením do první a následným dopočítáním a. Dostaneme čísla $\pm(\frac{\sqrt{22}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Nyní ověříme, že kvadratická rovnice $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 + i\sqrt{11} = 0$ má skutečně dva kořeny.

Krátkou úpravou kvadratického polynomu se můžeme přesvědčit, že „vzoreček“ pro výpočet kořenů kvadratické rovnice funguje pořád stejně:

$$\begin{aligned} px^2 + qx + r &= p\left(\left(x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{4p^2}\right) - \left(\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}\right)\right) \\ &= p\left(\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{q^2-4pr}{4p^2}}\right)^2\right) \\ &= p\left(x + \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{q^2-4pr}{4p^2}}\right)\left(x + \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2-4pr}{4p^2}}\right). \end{aligned}$$

Položíme-li poslední součin roven nule a vyjádříme x, dostaneme požadované.

Co ale dělat, když umocňujeme na něco komplexního?

Komplexní exponenciála a logaritmus

Pro nedostatek prostoru zavedeme komplexní exponenciálu a její vlastnosti uvedeme bez důkazu.

Definice. Funkci $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, která komplexnímu číslu $z = a + bi$ přiřadí hodnotu $e^a(\cos b + i \sin b)$, nazýváme komplexní exponenciála.

Věta. (Vlastnosti komplexní exponenciály) *Komplexní exponenciála je spojitá $2\pi i$ periodická funkce, která splňuje následující vlastnosti:*

- $\exp'(z) = \exp(z)$,
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$,
- $\exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Úloha. Jaký je obraz přímky rovnoběžné s osou x při zobrazení exp?

Idea, jak definovat komplexní logaritmus, je vcelku jednoduchá – chceme funkci, která nám pro zvolené z vrátí takovou hodnotu w, že $\exp(w) = z$. Takových hodnot může být hodně, nicméně když budeme požadovat w takové, že $\Im(w) \in [0, 2\pi)$, dostaneme právě jednu. Lze si rozmyslet, že $w = \log|z| + i \arg z$.

Definice. (Komplexní mocnina) Pro $z \neq 0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ definujeme $z^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log(z))$.

Pokud se zbavíme požadavku, že logaritmus musí být jednoznačný, můžeme uvažovat množinu komplexních mocnin, která je pro $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ dokonce nekonečná.

Co se s tím dá dělat

Zkusme si s pomocí komplexní exponenciály spočítat řešení rovnice $x^n = -1$. Postupně budeme upravovat $x^n = \exp(n \cdot \log x) = \exp(\pi i) = -1$. Protože je exponenciála $2\pi i$ periodická, $n \log x = \pi i + 2k\pi i$. Nakonec dostaneme $x = \exp(\frac{\pi i + 2k\pi i}{n})$. Z definice exponenciály a absolutní hodnoty si lze všimnout, že všechna řešení jsou komplexní jednotky, a ty navíc tvoří pravidelný n-úhelník.

Úloha. Co se změní, pokud budeme uvažovat rovnice $x^n = 1$, $x^n = c$, kde $c \in \mathbb{R}$?

Úloha. Jakou hodnotu má výraz i^i?

Několik příkladů na závěr

Příklad 1. Nechť P je reálný polynom lichého stupně. Dokažte, že má kořen v reálných číslech.

Příklad 2. Nechť $z \neq 1$ je komplexní jednotka. Dokažte, že zlomek $\frac{z+1}{z-1}$ je ryze imaginární (tj. že má nulovou reálnou část a nenulovou imaginární část).

Příklad 3. Najděte všechna z, pro která $z^2 + \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$.

Příklad 4. Sečtěte:

- $\sin a + \sin 2a + ... + \sin ka$,
- $\cos a + \cos 2a + ... + \cos ka$.

Příklad 5. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ sečtěte:

- $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots$,
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} - \dots$.

Literatura a zdroje

[1] Roman Lávička: *Úvod do komplexní analýzy*, Praha, 2017.
[2] Pavel Podbrdský: *Komplexní čísla*, neznámé, 2001.
[3] Martin Tancer: *Komplexní čísla a jejich geometrické aplikace*, Olšanka, 2006.