Komplexní přednáška

Jan Kadlec

Abstrakt. Tato komplexní přednáška se pokusí co nejjednodušším způsobem podat komplexní čísla – říct, co to je a odkud se to vzalo, a z celkem jednoduchých věcí dostat vše potřebné. Ukážeme si, že na známém a pro prvoposluchače těžko stravitelném faktu $i^2 = -1$ není vlastně nic zvláštního a je to jen jednoduchá geometrie, respektive otočení. Propojíme svět geometrie a algebry, a dostaneme tak oba základní tvary komplexních čísel. Ke konci první části se možná dostaneme i k třetímu, exponenciálnímu, tvaru a naši komplexní přednášku tímto komplexně uzavřeme. V druhé části dokončíme, co jsme nestihli a pojedeme dále, třeba i do světa ~~reálného~~ komplexního vstříc fyzice či kvantovce ;-).

Motivace

V dávných dobách Pythagorejců znamenala přepona v rovnoramenném pravoúhlém jednotkovém trojúhelníku katastrofu. Tedy přesněji její délka, neboť $\sqrt{2}$ nebylo možno zapsat jako podíl dvou přirozených čísel. Problém se povedlo vyřešit až o pár staletí později rozšířením čísel o množinu iracionálních a vytvořením čísel reálných, $\mathbb{R}$. Podobný problém nastal s odmocninou ze záporného čísla. Třeba vyřešit jednoduchou rovnici $x^2 + 1 = 0$ nebylo v $\mathbb{R}$ možné. Pomohlo až zavedení komplexní jednotky, i, a vznik množiny komplexních čísel, $\mathbb{C}$. Pojďme nyní udělat totéž.

Úmluva. Dále v tomto textu předpokládáme, že a, b, c a d jsou reálná čísla, u, w a z jsou čísla komplexní a n je číslo přirozené.

Definice. (Komplexní jednotka) *Komplexní jednotka*, i, je takové číslo, pro které platí $i^2 = -1$.

Definice. (Komplexní číslo) Každé číslo z, které lze zapsat ve tvaru $z = a + bi$, nazveme *číslem komplexním*, a nazveme *reálnou částí* komplexního čísla a b nazveme jeho *imaginární částí*.

Sčítání a násobení funguje stejně jako v reálných číslech, tj.

(I) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$

(II) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

Cvičení.

(1) Dokaž (II).

(2) Ukaž, že platí všechny následující vztahy známé z $\mathbb{R}$:

a) $w + (u + z) = (w + u) + z$,
b) $w(uz) = (wu)z$,
c) $w(u + z) = wu + wz$,
d) $w + 0 = w$ a $w1 = w$.

(3) (Dělení) Ukaž, že platí: $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Zkus to vynásobením obou stran výrazem $(c + id)$ (nebo snad $(c - id)$?).

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla a, b, c, d, e, f platí

$$a(b(c(d(ef)))) = ((((ab)c)d)e)f.$$

(MKS 19–7–1)

První dostaveníčko s komplexy – rovnice

Věta. (Základní věta algebry) *Každý nekonstantní polynom nad komplexními čísly má kořen.*

Věta. (Trochu jinak) *Každý polynom stupně n má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů/řešení.*

Příklad 2. (Návrat k motivaci) Vyřeš rovnici $x^2 + 1 = 0$ v $\mathbb{C}$.

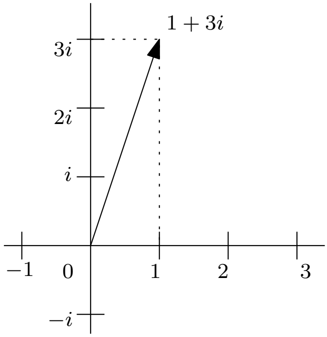
Příklad 3. (Kvadratická rovnice) Vyřeš rovnici $x^2 + 2x + 5 = 0$ v $\mathbb{C}$.

Cvičení. Odvoď Vietovy vztahy pro komplexní čísla. Vyjdi z řešení kvadratické rovnice.

Příklad 4. Nechť a, b jsou reálné parametry. Najdi všechna (komplexní) řešení rovnice $x^4 + (2a + 2b)x^3 + (3 + 4ab)x^2 + (4a + 2b)x + 2 = 0$. (MKS 19–7–5)

Rovina pana Wessla, Arganda, Warrena, Gausse, ještě na někoho jsem zapomněl?

Všichni tito pánové přišli se skvělým vynálezem, s komplexní rovinou. Mějme vodorovnou, reálnou, osu x, na kterou budeme vynášet reálnou část komplexního čísla, a k ní kolmou, komplexní osu y, na kterou budeme vynášet imaginární část. Pak bude číslo $z = a + bi$ reprezentováno bodem (x, y) v této rovině (viz obrázek). Pro případ $b = 0$ dostáváme pouze reálnou osu, tedy *ryze reálná* čísla, pro $a = 0$ pro změnu čísla *ryze komplexní*.

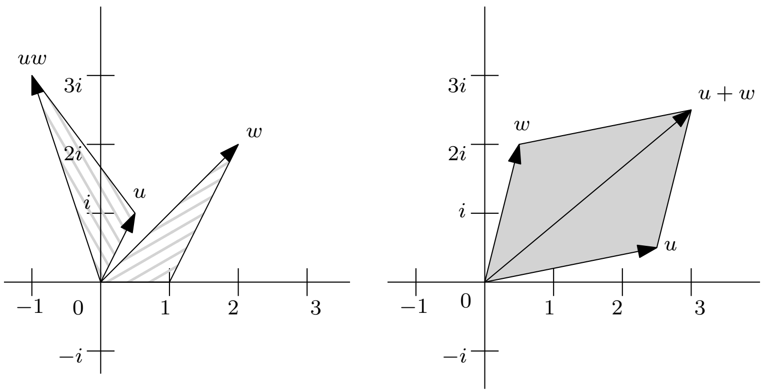


A hurá na geometrii. Předtím ještě rychlá úloha.

Úloha. Nechť a, b jsou komplexní čísla taková, že $|a| = |b| = 1$. Urči hodnotu výrazu $|a-b|^2 + |a+b|^2$. (MKS 23–7–1)

Čmáráníčko

Magie pomalu přichází. Při geometrickém zobrazení komplexních čísel se nám ze sčítání stane sčítání vektorů, tedy vznikne nám rovnoběžník, a z násobení nám vzniknou dva podobné trojúhelníky (viz obrázek).



Co více, sčítání je nyní jen „pouhé“ posunutí, bez rotace a bez škálování. A co se stalo s násobením?

Zkusme nyní přejít k jiným souřadnicím, třeba polárním.

Poznámka. Úhel $\vartheta \in \langle 0, 2\pi)$ může být libovolně zvětšen či zmenšen o 2π a dostaneme se na totéž místo. To nám možná nyní překáží, ale je to vlastnost v pokročilejší matematice velmi využívaná.

Poznámka. (Výuková) V textu budu používat hodně πsmenek z řecké abecedy, protože jako malý matematik jsem se tak pasivně naučil řeckou abecedu a to se mi pak nejen v Řecku celkem hodilo (a vám by se to taky hodit mohlo) ;-).

Definice. (Parametry) Vzdálenost bodu v komplexní rovině od počátku souřadného systému budeme značit r a platí, že $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagorova věta), kde $|z|$ budeme nazývat *absolutní hodnotou* komplexního čísla z. Dále označme ϑ úhel, který svírá daný vektor odpovídající bodu z s reálnou osou x měřeno proti směru hodinových ručiček.

Pak
$$x = r \cos \vartheta,$$
$$y = r \sin \vartheta.$$

Geometrický tvar komplexního čísla už je přede dveřmi. Stačí dát vše dohromady a dostáváme druhé vyjádření komplexního čísla.

Definice. (Goniometrický tvar) Každé komplexní číslo $z = a + bi$ lze zapsat ve tvaru $z = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je *absolutní hodnota* komplexního čísla a číslo φ z rozmezí $[0, 2\pi)$ nazýváme jeho *argumentem*.

Poznámka. Převod čísel mezi tvary se děje přes úpravu výše zmíněných rovnic, tedy: $\cos \vartheta = \frac{a}{|z|}, \sin \vartheta = \frac{b}{|z|}$.

Příklad 5. Najdi všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z| = 1$ a $\left|z^2 + z + 1\right| = 1$.
(MKS 19–7–3)

Příklad 6. Dokaž vztah $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$.

Příklad 7. Najdi přirozené číslo n, pro které platí $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$.
(Náboj 2008, Úloha 44)

Exponenciální tvar

Při násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru jsme převedli násobení na sčítání (vynásobili jsme absolutní hodnoty a sečetli argumenty). To je podobný postup jako při použití logaritmu či exponenciály ($\log(ab) = \log(a) + \log(b)$). Po komplexní exponenciále tedy budeme vyžadovat, aby $a^{w+z} = a^w \cdot a^z$ pro $a \neq 0$. Problém nastává s nejednoznačností řešení, jak jsme si ukázali výše, je zde mnoho řešení. Zavedením základu e se vyhneme této nejednoznačnosti, proč a jak to funguje dalece přesahuje rámec a smysl této přednášky. Komplexní exponenciála je definována jako $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Bez důkazu uvedeme i další důležitou vlastnost a to tu, že pro libovolné komplexní $w \neq 0$ existuje takové z, že $w = e^z$, neboli máme inverzní funkci, komplexní logaritmus. Libovolné číslo z lze převést na tvar $z = \log(r) + i\vartheta$, tedy poté $w = e^z = e^{\log(r)+i\vartheta} = e^{\log(r)} e^{i\vartheta} = re^{i\vartheta}$. Podíváme-li se na předchozí vyjádření v polárních souřadnicích a na jednotkovou kružnici, dostáváme:

Tvrzení. (Eulerova formule) $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$.

A to už je jen kousek ke známé větě, kterou si můžeš jako cvičení dokázat ;-).

Věta. (Moivreova) *Pro φ a celé číslo n platí následující rovnost:*
$$(re^{i\varphi})^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

.

Poznámka. Tato věta se používá pro výpočet mocnin i odmocnin komplexních čísel. Pozor, odmocniny nejsou jednoznačné! $\sqrt[n]{z}$ je vlastně řešení rovnice $x^n - z = 0$ a polynom n-tého stupně může mít (a v tomto případě pro $z \neq 0$ má) n různých komplexních kořenů.

Úloha. (Rozehřívací) Spočti $\sin 36°$. Tj. napiš ho jako výraz, ve kterém se vyskytují pouze číselné konstanty, sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocniny.

(MKS 21–3–2)

Řešení. Využijeme Moivreovu větu. Z této věty dostáváme, že

$$\begin{aligned}\cos 5x + i \sin 5x &= (\cos x + i \sin x)^5 = \\ &= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x \\ &+ 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x.\end{aligned}$$

Porovnáním imaginárních částí předchozího výrazu a dosazením $1 - \sin^2 x$ za $\cos^2 x$ dostáváme vzorec $\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$.

Dosaďme $x = 36°$ a označme si $y = \sin x$. Dostáváme rovnici $16y^5 - 20y^3 + 5y = 0$ s kořeny $y_1 = 0$, $y_{2,3,4,5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}$. Hledaná hodnota je $0 \leq \sin 36° \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°$, a tak $\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Příklad 8. Urči v $\mathbb{C}$ hodnotu výrazu $\sqrt{-1}$.

Příklad 9. (Binomická věta) Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $x^3 - 8 = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Příklad 10. (Binomická věta podruhé) Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $ax^n - b = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Příklad 11. Řeš v $\mathbb{C}$ rovnici $x^3 - 10x^2 + 10x - 9 = 0$. Řeš algebraicky i geometricky. Řešení zanes do roviny.

Úloha. (Součtové vzorce) Pomocí Eulerova (exponenciálního) tvaru odvoď vzorec pro $\cos 2x$.

Řešení. Dosaďme do definičního vztahu: $e^{i2\alpha} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$. Dále platí, že $e^{i2\alpha} = (e^{i\alpha})^2 = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i \sin\alpha \cos\alpha$. Tyto dva výrazy se rovnají a pro rovnost komplexních čísel platí, že jsou si rovny, právě když se rovnají jejich reálné a jejich imaginární části. Tedy

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Cvičení. (Další součtové vzorce) Odvoď součtové vzorce pro výrazy $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$.

Příklady

Příklad 12. (i pro i-mocné) Spočti i^i.

Příklad 13. (i pro π-mocné) Spočti $e^{2\pi i}$.

Příklad 14. (Eulerova formule) Dokaž $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Příklad 15. (Magnetické kvantové číslo) Při řešení jednoduchého příkladu z kvantovky se pro rotující částici vyrojí následující rovnice $e^{\pm im2\pi} = 1$. Jaké je její řešení? Připomíná ti výsledek něco z chemie?

Příklad 16. (Další vzorečky) Odvoď vzorec pro $\cos 3\zeta$.

Příklad 17. (Vektory) Najdi šest (tři dvojice) na sebe kolmých, jednotkových vektorů dimenze dva.

Příklad 18. (Pro drsňáky) Uprav na co nejjednodušší tvar výraz

$$0^2\binom{n}{0} + 3^2\binom{n}{3} + 6^2\binom{n}{6} + \cdots + (3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor)^2\binom{n}{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo takové, které je menší nebo rovno x. (MKS 23–7–8)

Návody

1. Využij bod 2b) ze cvičení.

3. Číslo -16 lze zapsat jako $16i^2$.

3. Viètovy vztahy jsou: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

5. Využij goniometrického tvaru, nechceš-li řešit řešit polynom čtvrtého stupně ;-).

6. Využij jednotkové kružnice a Pythagorovy věty.

7. Může se hodit, že pro komplexní čísla v rovině platí $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \vartheta$, kde ϑ je úhel od osy x. Dále to zkus přepsat do součinu čísel v goniometrickém tvaru.

8. Využij Moivreovu větu pro mocninu $\frac{1}{2}$.

11. Pomoci může součinový tvar $(x-9)(x^2 - x + 1) = 0$.

12. Využij $e^{i\log(i)}$.

14. Využij exponenciální tvar a goniometrický tvar nebo výsledek předchozího příkladu.

16. A co třeba rozložit $e^{3i\zeta}$? (Nebo jsem chtěl poradit $(e^{i\zeta})^3$? Ach ta skleróza...)

17. Dva vektory jsou kolmé $\iff$ je jejich skalární součin roven 0. Dobrý začátek jsou vektory $(1,0), (0,1)$.

18. Nejprve začít kombinatorickou úvahou a pak využít vše z komplexních čísel. Je to dloooooouhé.

Literatura a zdroje

[1] Roger Penrose: *The Road to Reality*, Alfred A. Knopf, 2004.
[2] MKS, 19. ročník, 7 série, Úvod k sérii.
[3] Jan Krejčí: *Komplexní čísla*, Meziměstí, 2017.
[4] Vita Smid: *Odvození běžných goniometrických vzorců*, *http://ze.phyr.us/cs/deriving-common-trigonometric-identities/*