Komplexní čísla

Tomáš Matoušek

Definice. (Množina komplexních čísel) *Množina komplexních čísel* $\mathbb{C}$ *je množina uspořádaných reálných dvojic* $[x, y]$, *na kterých je definována rovnost, sčítání a násobení následovně:*

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b][c, d] = [ac - bd, bc + ad].$$

Dvojici $[0, 1]$ *označíme* i *a budeme ji nazývat komplexní jednotkou.*

Poznámka. Každou dvojici $[x, 0]$ můžeme ztotožnit s reálným číslem x. Zřejme platí $i^2 = [-1, 0] = -1$. Komplexní číslo $[x, y]$ pak můžeme rozepsat jako $[x, 0] + [0, y] = [x, 0] + [0, 1][y, 0] = x + iy$. Zavedema dále označení $\mathrm{Re}(x + iy) = x$ a $\mathrm{Im}(x + iy) = y$.

Definice. *Čísla* z *taková, že* $\mathrm{Re}\, z = 0$, *nazýváme ryze imaginární.*

Poznámka. Dvojice $[x, y]$ můžeme také interpretovat jako body v rovině. Této rovině se říká *Gaussova rovina*. Reálná čísla tvoří „osu x“.

Definice. *Z geometrické představy pak uvidíme, že má smysl definovat*

- *absolutní hodnotu čísla* $z = x + iy$ *jako jeho vzdálenost od počátku, tj.*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

- *číslo komplexně sdružené k číslu* $z = x + iy$, *značíme* $\overline{z}$, $\overline{z} = x - iy$.

Definice. *Komplexní exponenciála je definována pro* $y \in \mathbb{R}$ *jako*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

obecněji pro $z \in \mathbb{C}$ *je*

$$e^z = e^{\mathrm{Re}\, z} (\cos \mathrm{Im}\, z + i \sin \mathrm{Im}\, z).$$

Věta. (Moivreova) *Pro každé* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je*

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha.$$

Poznámka. Z definice exponenciály je vidět, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je

$$e^z = e^{z + 2k\pi i},$$

a že tedy komplexní exponenciála je periodická s periodou $2k\pi i$.

Definice. *Každé komplexní číslo z leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v počátku a poloměrem $|z|$. Je tedy vidět, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ existují r, $\alpha \in \mathbb{R}$, že*

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

což je zápis komplexního čísla z v goniometrickém tvaru. Jelikož funkce cos *a* sin *jsou periodické, tento zápis není jednoznačný.*

Poznámka. Všimněme si také, že $|e^{iy}| = 1$, tedy $\{e^{iy} : y \in \mathbb{R}\}$ je v Gaussově rovině jednotková kružnice se středem v počátku.

Definice. *Argument komplexního čísla je funkce* $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *taková, že*

$$\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\} = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

kde $\arg z \in (-\pi, \pi]$ *je hlavní hodnota argumentu komplexního čísla z.*

Definice. *Logaritmus komplexního čísla je funkce* $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *taková, že*

$$\operatorname{Log} z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \log|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

Definice. (Obecná komplexní mocnina) *Je-li $z, w \in \mathbb{C}$, pak $z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$.*

Důsledek. Speciálně pro $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$z^x = |z|^x e^{ix \operatorname{Arg} z}.$$

Důsledek. (komplexní odmocnina) Speciálně pro $w = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \operatorname{Arg} z}.$$

Věta. (Základní věta algebry) *Každý polynom stupně n s reálnými koeficienty má v komplexních číslech právě n kořenů.*

Poznámka. Kořenů s nenulovou imaginární složkou je vždy sudý počet a tvoří je komplexně sdružená čísla.

Příklad. Kvadratická rovnice $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se záporným diskriminantem má vždy dvě řešení:

$$z_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$