Komplexní čísla

Pavel Podbrdský — 16. května 2001

Zavedení komplexních čísel

Komplexní čísla jsou rozšířením oboru reálných čísel. Mohou být definována mnoha ekvivalentními způsoby. Nejdůležitější jsou tyto:

(1) (*intuitivně*) Reálná čísla rozšíříme o imaginární jednotku i, pro kterou definujeme $i^2 = -1$. Komplexní čísla pak budou čísla ve tvaru $(a+ib)$, kde a, b jsou čísla reálná. Sčítání a násobení funguje stejně jako v reálných číslech, tj.

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

(Druhý vztah dostaneme roznásobením a následným použitím vztahu $i^2 = -1$.)

(2) (*geometricky*) Vezmu body (uspořádané dvojice reálných čísel) v rovině, sčítání a násobení definuji

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

$$[a,b]\cdot[c,d]=[ac-bd,bc+ad].$$

Mluvíme pak o tzv. *Gaussově rovině*.

(3) (*alegbraicky*) Komplexní čísla jsou nejmenší číselný obor, ve kterém má každý nekonstantní reálný polynom kořen.

Snadno můžeme ověřit vzorec pro dělení:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Zavedeme následující označení.

(1) absolutní hodnota: $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.
(2) reálná, imaginární část: $\mathrm{Re}\,(a+ib)=a$, $\mathrm{Im}\,(a+ib)=b$.
(3) komplexně sdružené číslo: $\overline{a+ib}=a-ib$.

Goniometrický tvar

Každé komplexní číslo z lze psát v goniometrickém tvaru $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. Stačí volit $r=|z|$ a α tak, aby $\cos\alpha=\frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|}$, $\sin\alpha=\frac{\mathrm{Im}\,z}{|z|}$.

Pomocí součtových vzorců snadno odvodíme formuli pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\cdot r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)).$$

Zavedení exponenciální funkce

Exponenciální funkci, kterou známe z reálných čísel bychom rádi rozšířili na celou množinu $\mathbb{C}$. To lze provést několika způsoby:

(1) Definujeme $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Je potřeba ověřit zejména to, že tato definice je korektní (nekonečný součet na pravé straně konverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$), že nedostáváme rozpor s definicí exponenciální funkce v oboru $\mathbb{R}$ a že pro každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

(2) Využijeme reálných goniometrických funkcí a pro $x, y \in \mathbb{R}$ definujeme $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$. I zde je potřeba ověřit vlastnosti takto definované exponenciální funkce.

Dále už budeme místo $\exp(z)$ psát e^z. Právě definovanou exponenciální funkci můžeme využít k definici komplexních goniometrických funkcí. To lze provést nejlépe takto:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Moivreova věta

Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n.$$

Důkaz: Jde o snadný důsledek definice komplexní exponenciály. Levá strana je totiž rovna e^{nx}, pravá je rovna $(e^x)^n$. Jejich rovnost snadno dostaneme matematickou indukcí ze vztahu $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Moivreovu větu lze využít např. k odvození vztahů pro $\cos nx$ (resp. $\sin nx$). Stačí totiž pravou stranu roznásobit podle binomické věty a porovnat reálné (resp. imaginární) části vzniklé rovnosti. Např. pro $n = 2, 3$ tak dostaneme

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Geometrická interpretace

Pomocí komplexních čísel lze řešit spoustu planimetrických problémů. Body v rovině lze interpretovat jako komplexní čísla v Gaussově rovině, vzdálenost dvou bodů jako absolutní hodnotu jejich rozdílu, přičtení komplexního čísla odpovídá posunutí, vynásobení číslem $\cos\alpha + i\sin\alpha$ pak otočení o úhel α. Typické postupy si ukážeme na příkladech.

Příklady

1. příklad Jaký je obor hodnot funkcí e^z, $\sin z$, $\cos z \dots$?

2. příklad Jaký je obraz přímky rovnoběžné s reálnou osou při zobrazení e^z?

3. příklad Buď $|z| = 1$, $z \neq 1$. Dokažte, že $\frac{z+1}{z-1}$ je ryze imaginární číslo.

4. příklad Najděte všechna z pro něž $z^2 + \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$.

5. příklad Buď $\omega = e^{2\pi i/n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Čemu je roven součin $(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})$?

6. příklad Zobecněnou kružnicí v rovině nazveme libovolnou kružnici nebo přímku. Dokažte, že racionální lomená funkce

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

(a, b, c, d jsou komplexní koeficienty) zobrazuje libovolnou zobecněnou kružnici opět na zobecněnou kružnici.

7. příklad Nalezněte nutnou a postačující podmínku na koeficienty a, b, c, d z předchozí úlohy, aby funkce f zobrazovala otevřený jednotkový kruh na sebe.

8. příklad Vrcholy pravidelného n úhelníka jsou obarveny několika barvami (alespoň dvěma) tak, že vrcholy stejné barvy tvoří vždy pravidelný mnohoúhelník. Dokažte, že existují dvě různé barvy, jimiž je obarven stejný (nenulový) počet vrcholů.

9. příklad Sečtěte pro dané n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$$

10. příklad Sečtěte pro dané n a α

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha.$$

11. příklad V $\mathbb{C}$ uvažujme podmnožinu $M = \{a+bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ s operacemi $+$ a $\cdot$. Dokažte, že pro každá dvě nenulová čísla $a, b \in M$ existuje jejich největší společný dělitel v M (ne nutně jediný). Ukažte, že jsou-li c, d dva největší společní dělitelé čísel a, b, pak $c^4 = d^4$. Řešte analogickou úlohu pro $M' = \{a + b\varepsilon; a, b \in \mathbb{Z}\}$, kde $\varepsilon = e^{\frac{2}{3}i\pi}$.

Poznámka: Největším společným dělitelem nenulových čísel a, b rozumíme libovolné číslo c, které splňuje

$$c|a \wedge c|b \wedge (d|a \wedge d|b \Rightarrow d|c).$$

12. příklad Ke každé straně daného trojúhelníku připíšeme vně (resp. dovnitř) rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že těžiště takto vzniklých rovnostranných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

13. příklad Ke každé straně daného čtyřúhelníku připíšeme vně čtverec. Dokažte, že spojnice středů protilehlých čtverců jsou na sebe kolmé a mají stejnou délku.

14. příklad Nechť $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou stejně orientované rovnostranné trojúhelníky. Buď C_i střed úsečky A_iB_i $(i = 1, 2, 3)$. Dokažte, že $C_1C_2C_3$ je také rovnostranný trojúhelník.

15. příklad Dokažte Ptolemaiovu větu (tentokrát pomocí komplexních čísel `:-)`), tj. následující tvrzení:

V každém čtyřúhelníku o stranách délek a, b, c, d (v tomto pořadí) a úhlopříčkách délek e, f platí

$$ac + bd \geq ef.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když daný čtyřúhelník je tětivový.

16. příklad Ke stranám středově souměrného šestiúhelníku jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že středy spojnic sousedních nově vzniklých vrcholů těchto trojúhelníků tvoří pravidelný šestiúhelník.

17. příklad Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě O. Buďte S_1 a S_2 těžiště trojúhelníků ABO a CDO a H_1 a H_2 průsečíky výšek v trojúhelnících BCO a DAO. Dokažte, že S_1S_2 je kolmé na H_1H_2.