Komplexní čísla a jejich geometrické aplikace

Martin Tancer

Úvod

Komplexní čísla rozšiřují běžně používaná reálná čísla. Na některé aplikace se pak hodí lépe než právě čísla reálná. Například lze pomocí nich snáze řešit některé úlohy. Také se hodí k bodování úloh pro PraSátko. Více si povíme na přednášce.

Definice a základní vlastnosti komplexních čísel

Definice. Komplexními čísly *budeme rozumět výrazy tvaru* $z = a + bi$, *kde* a *a* b *jsou reálná čísla.* i *pro nás bude pouze symbol. Hodnotu* a *nazveme* reálnou částí *čísla* z *a budeme značit* $\mathrm{Re}\, z$, *hodnotu* b imaginární částí *a budeme značit* $\mathrm{Im}\, z$. *Množinu komplexních čísel budeme značit* $\mathbb{C}$.

Poznámka. Pokud je a nebo b rovno nule, potom příslušnou část komplexního čísla nepíšeme, tj. píšeme například jen 1 místo $1 + 0i$, $-i$ místo $0 + (-1)i$ nebo 0 místo $0 + 0i$.

Poznámka. Všimni si, že se na komplexní čísla podle definice lze dívat jako na dvojice reálných čísel, to budeme časem používat.

Definice.

(1) Součtem *komplexních čísel* $z = a + bi$ *a* $w = c + di$ *rozumíme číslo* $z + w = (a + c) + (b + d)i$

(2) Součinem *komplexních čísel* $z = a + bi$ *a* $w = c + di$ *rozumíme číslo* $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Poznámka. Všimni si, že podle definice součinu je $i^2 = i \cdot i = -1$. Tento vztah byla hlavní motivace pro zavedení komplexních čísel. Myšlenka totiž byla rozšířit reálná čísla tak, aby rovnice $x^2 = -1$ měla řešení. V komplexních číslech tato rovnice tedy řešení má (totiž i, ale také $-i$). Násobení komplexních čísel může vypadat trochu podivně a těžko zapamatovatelně. Nicméně, stačí si pamatovat pouze vztah $i^2 = -1$ a potom se už intuitivně dá odvodit $(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$.

Jedna z hlavních sil komplexních čísel je následující věta (s těžkým důkazem). Ukazuje, že zabývat se polynomiální rovnicí $x^2 = -1$ stačilo.

Věta. (Základní věta algebry) *Každá rovnice tvaru $P(z) = 0$, kde P je nekonstantní komplexní polynom má v komplexních číslech řešení.*

Definice. *Nechť $z = a + bi$. Definujme číslo* komplexně sdružené *k číslu z jako $\overline{z} = a - bi$.*

Tvrzení. Nechť z_1, z_2 jsou komplexní čísla a P je komplexní polynom, potom platí.

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(3) $\overline{P(z_1)} = P(\overline{z_1})$.
(4) Je-li P reálný polynom, potom $P(z_1) = 0$, právě když $P(\overline{z_1}) = 0$.

Definice. *Nechť $z = a + bi$. Definujme* absolutní hodnotu *z čísla z jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.*

Tvrzení. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Goniometrický tvar komplexních čísel

Nyní přejdeme ke goniometrickému tvaru komplexních čísel, dává geometrický pohled na komplexní čísla a ukazuje jejich další vlastnosti.

Definice. *Každé nenulové komplexní číslo lze vyjádřit ve tvaru $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, kde $r > 0$ je jednoznačně určeno a $\phi \in \mathbb{R}$ je jednoznačně určeno až na sčítanec $2k\pi$, kde k je celé. Tomuto tvaru se říká* goniometrický tvar *komplexního čísla.*

Jak je vidět z následujícího tvrzení, výhoda goniometrického tvaru je, že se v něm dobře násobí. Na druhou stranu se v něm hůře sčítá.

Tvrzení.

$$r_1(\cos\phi + i\sin\phi) \cdot r_2(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\phi + \theta) + i\sin(\phi + \theta)).$$

Věta. (de Moivre) $\cos n\phi + i\sin n\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^n$.

Na přednášce si povíme ještě o komplexní exponenciele, která se hodí k všelijakému počítání. Dále se budeme věnovat zejména příkladům - především geometrickým aplikacím komplexních čísel.

Příklady

Příklad 1. Nalezněte všechna komplexní řešení polynomiální rovnice $x^n - 1 = 0$.

Příklad 2. Nechť P je reálný polynom lichého stupně. Dokažte, že má kořen v reálných číslech.

Příklad 3. Spočítejte v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin k\alpha.$$

Příklad 4. Sečtěte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots.$$

Příklad 5. Ke každé straně daného trojúhelníku připíšeme rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že těžiště takto vzniklých trojúhelníků tvoří opět rovnostranný trojúhelník.

Příklad 6. Ke každé straně daného čtyřúhelníku připíšeme čtverec. Dokažte, že středy takto vzniklých čtverců tvoří čtyřúhelník s kolmými a stejně dlouhými úhlopříčkami.

Příklad 7. Nechť $A_1A_2A_3$ a $B_1B_2B_3$ jsou stejně orientované rovnostranné trojúhelníky. Nechť C_i je střed A_iB_i. Dokažte, že buď body C_1, C_2 a C_3 splývají, nebo tvoří rovnostranný trojúhelník.

Příklad 8. Dokažte Ptolemaiovu větu, tj. tvrzení, že pro každý čtyřúhelník platí

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

a rovnost nastane, právě když je $ABCD$ tětivový.

Příklad 9. Spočítejte součet délek všech úhlopříček v pravidelném n-úhelníku, má-li poloměr kružnice opsané roven 1.

Příklad 10. Dokažte, že rovnice $a^3 + b^3 = c^3$ nemá řešení v nenulových celých číslech.