Komplexní čísla geometricky

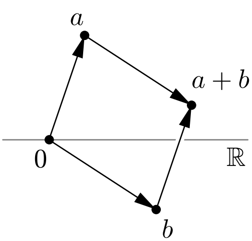
MIREK OLŠÁK

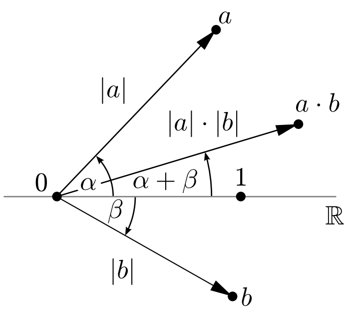
ABSTRAKT. Příspěvek zavádí komplexní čísla jakožto vektory v rovině a na základě této definice objevuje jejich vlastnosti. Dále ukazuje souvislosti se spirální podobností.

Zavedení komplexních čísel

Definice. Mějme rovinu a v ní danou osu reálných čísel. Této rovině budeme říkat *komplexní rovina*, její body budeme nazývat *komplexní čísla*. Bodu 0 na reálné ose říkáme *počátek* a komplexní čísla ztotožňujeme s vektory spojujícími počátek a příslušné komplexní číslo jakožto bod v rovině.

Definice. Součet komplexních čísel definujeme jako součet příslušných vektorů. Dále definujeme součin komplexních čísel jako takový vektor, který má délku rovnu součinu délek jednotlivých činitelů a svírá s kladnou reálnou polopřímkou úhel rovný součtu orientovaných úhlů jednotlivých činitelů.





Pozorování. *Operace na komplexních číslech splňují očekávané vlastnosti.*

(i) *Na reálné ose fungují jako běžné sčítání a násobení.*
(ii) *Při sčítání nezáleží na pořadí sčítanců.*
(iii) *Při násobení nezáleží na pořadí činitelů.*
(iv) *Funguje roznásobování, tedy $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Jak to je s imaginární jednotkou?

Pozorování. *Existují právě 2 komplexní čísla, jejichž druhá mocnina je rovna* -1.

Definice. Tomu číslu z předchozího pozorování, které leží nad reálnou osou[1], budeme říkat *imaginární jednotka*. Značíme ji i.

Pozorování. *Každé komplexní číslo se dá jednoznačně napsat ve tvaru* $x+iy$, *kde* $x, y \in \mathbb{R}$.

Důsledek. (Pythagorova věta) *Pro pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek* a, b *a přeponou délky* c *platí* $a^2 + b^2 = c^2$.

Návod. Spočtěte dvěma způsoby $(a + ib)(a - ib)$.

Důsledek. (součtové vzorce) *Pro úhly* α, β *platí vztahy mezi goniometrickými funkcemi*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Návod. Spočtěte dvěma způsoby $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Průměrování

Pozorování. *Vážený aritmetický průměr lineárních funkcí je lineární funkce.*

Toto pozorování můžeme geometricky přeformulovat.

Důsledek. *Máme-li v rovině přímo podobné objekty, pak jejich aritmetickým průměrem bude opět objekt podobný původním.*

Jako konkrétní příklad uvedeme:

Příklad. V rovině jsou čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$, oba značené po směru hodinových ručiček. Pak středy úseček AA', BB', CC', DD' tvoří čtverec.

V úlohách ovšem může být toto pozorování poněkud schované. :-)

Úloha. (van Aubelova věta) Stranám AB, BC, CD, DA čtyřúhelníka $ABCD$ z vnějšku připíšeme čtverce a jejich středy označíme postupně U, V, X, Y. Ukažte, že úsečky UX a VY jsou na sebe kolmé a jsou stejně dlouhé.

Úloha. (Napoleonova věta) Stranám AB, BC, CA z vnějšku připíšeme rovnostranné trojúhelníky. Ukažte, že 3 těžiště těchto trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

[1] Ono je popravdě jedno, které i-čko bereme, ale to nad osou je standardní.

Úloha. Mějme v rovině body A a B a uvažme jednu ze dvou polorovin s hraniční přímkou AB. Pro každý bod C ze zvolené poloroviny sestrojme vně trojúhelníku ABC čtverce ACD_CE_C a CBF_CG_C. Dokažte, že se všechny přímky E_CF_C (hýbeme-li s bodem C) protínají v jednom bodě. (MKS 29–4–5)

Úloha. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protnou v P. Dále označme Q, R kolmé projekce bodu P postupně na strany AB, CD a ještě K, L postupně středy úseček BC, DA. Dokažte, že čtyřúhelník $QKRL$ je drak (tedy $|KQ| = |KR|$ a $|LQ| = |LR|$).

Úloha. Je dán konvexní čtyřúhelník $PIVO$. Osy stran PI a VO se protínají v bodě Y. Pro bod X uvnitř $PIVO$ platí $|\sphericalangle XVI| = |\sphericalangle XOP| < 90°$ a $|\sphericalangle XIV| = |\sphericalangle XPO| < 90°$. Ukažte, že $|\sphericalangle VYO| = 2\,|\sphericalangle XIV|$. (MKS 26–6–8, IMO Shortlist 2000)