

Kombinatorika na želvách

Tomášek Roskovec

ABSTRAKT. Procvičíme si základní kombinatorické dovednosti známé ze střední školy a zkusíme tyto dovednosti aplikovat na méně typické příklady. A taky se budeme bavit.

V první části přednášky se budeme zabývat základními kombinatorickými příklady, v druhé části se seznámíme s typickými příklady na téma rozdělení do přihrádek.

Příklady na rozeřtání

Příklad 1. V kupé pro osm osob sedí sedm želv. Kolika způsoby se mohou posadit, víme-li, že dvěma z nich se dělá špatně, pokud sedí proti směru jízdy, a Michelangelo chce sedět u okýnka a vedle Leonarda? Michelangelovi ani Leonardovi se špatně nedělá.

Příklad 2. Kolika způsoby můžeme přeskládat písmena ve slově ŽÉÉÉLVY tak, aby žádná dvě písmena É nestála vedle sebe?

Příklad 3. Krotitel želv uvádí do manéže n hodných želv beránčích a m zlých želv tygřích. Pokud by dvě z těchto tygřích želv šly bezprostředně po sobě, určité se začnou prát. Kolika způsoby (v závislosti na n a m) může želvy přivést?

Příklad 4. Želvy hrají v kanalizaci poker. Kolika způsoby může Rafaelo Michelangelovi rozdat karty, nechce-li, aby měl od nějaké barvy více než 4 karty?

Mírně pokročilé příklady

Příklad 5. Donatelo vymyslel pro své kamarády veselou hru. Musí vymyslet co nejvíce kombinací písmen ze spojení ŽELVYVAKCI tak, aby byly samohlásky seřazeny podle abecedy.

Příklad 6. Na výstavu přivedl terarista několik exemplářů vzácných želv, které chce srovnat do řady. Přinesl si 6 karet, 7 kajmanek a 8 želv sloních. Želvy jsou ovšem sociálně náročné a tak musí zachovat následující pravidla: Každá karta musí stát bezprostředně mezi kajmankou a želvou sloní, žádné dvě želvy sloní nesmí stát vedle sebe a žádné dvě kajmanky nesmí stát u sebe. Kolik způsoby může tu havěť srovnat?

Příklad 7. $2n$ želv stojí srovnáno do kruhu (jde o želvy kruhové, takže se není čemu divit). Kolika způsoby z nich můžu vybrat v želv, které se vydají na výpravu, za předpokladu, že žádná želva nepůjde se svou sousedkou.

KLÍČOVÁ SLOVA. kombinatorika, počet způsobů, želvy.

Příklad 8. Michelangelo hraje s Donatelem a Leonardem volený mariáš (Rafaela nechtěli, protože podváděl při rozdávání). Kolika způsoby mohou být rozdány karty, víme-li, že volí Donatelo? Kolika způsoby mohou být karty rozděleny mezi hráče po odložení talonu?

Dělení do přihrádek

Příklady na dělení do přihrádek lze rozlišit podle několika kategorií a při počítání jednotlivých příkladů je důležité tyto typy rozlišovat.

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pevnou velikostí

Tyto úlohy nevyžadují nové pohledy, řeší se jako typické kombinatorické úlohy.

Příklad 9. Čtyři želvy si mezi sebe dělí 28 dominových kostiček. Kolika způsoby to mohou provést?

Příklad 10. Po napínavé soutěži v dominu jsou vyhlášeny tři nejlepší želvy a pořadatel má mezi ně rozdělit šest cen. Vítěz dostane tři ceny, druhý dvě a třetí jednu cenu. Kolika způsoby si mohou ceny rozdělit?

Příklad 11. Zmoženy intelektuálně náročným dominem, rozhodly se želvy uspořádat turnaj v judu. Pro první kolo je zapotřebí z 16 želv vylosovat osm dvojic, které spolu budou zápasit. Kolika způsoby můžeme první kolo vylosovat?

Dělení nerozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Před řešením úloh se nám bude hodit krátká úvaha. Představíme-li si jedno konkrétní rozdělení jako přihrádky srovnané za sebou s předměty srovnanými za sebou, dostaneme jakousi posloupnost složenou z předmětů a hranic mezi přihrádkami. Tím jsme ale převedli problém přihrádek na základní kombinatorickou úlohu počtu posloupností se zadaným počtem prvků¹¹.

Příklad 12. Dvanáct želv chytilo na rybářské výpravě sedm tresek a pět platýsů. Kolik je možností rozdělení si úlovku, víme-li, že každá želva dostane rybu? A kolik je možností v případě, že některé želvy jsou vegetariánky a žádné ryby nechtějí?

Příklad 13. Kolika způsoby lze naklást šest želvích vajec do čtyř děr v písku, víme-li, že z bezpečnostních důvodů se nesmí klást více než dvě vejce do jedné díry?

¹¹Prvky zde rozumíme dvojího druhu; umísťované předměty a hranice mezi dvěma přihrádkami.

Příklad 14. Starý terarista odkazuje svým dvěma synům své vzácné želvy. Rozděluje jim $2n$ želv sloních, $2n$ kajmanek a $2n$ karet¹². Kolika způsoby je může podělit, aby oba dostali stejný počet želv.

Dělení rozlišitelných předmětů do přihrádek s pohyblivou velikostí

Poslední typ úloh může být při ošklivých vymežujících podmínkách velice obtížný, ale bez přidání podmínek je počet možností rozřazení z předmětů do t přihrádek z^t . Pro příklady s podmínkami je zapotřebí zdravého rozumu a základních kombinatorických dovedností.

Příklad 15. Čtyři želvy i s Třískou jedou výtahem skrz osmipatrovou budovu. Každá želva (i Tříska) vyskočí do nějakého patra. Kolika způsoby se mohou rozvést po budově? Kolik z toho bude případů, kdy v každém patře vyskočí nejvýše jedna želva (případně jeden Tříska)?

Příklad 16. Kolika způsoby můžeme uspořádat dvacet čísel týdeníku „Chovatel želv“ do knihovničky o pěti policích, víme-li, že do každé police se vejde jakýkoli počet časopisů?

Příklad 17. Při řazení „Chovatele“ se ukázalo, že jedno číslo chybí. Proto je zapotřebí zorganizovat 33 želv do tří pátracích skupin, které prohledají obývák, ložnici a terárium. Kolika způsoby můžeme skupiny zorganizovat za předpokladu, že na prohledání ložnice je zapotřebí právě polovina želv než na terárium a obývák dohromady.

Literatura

- [1] Herman Jiří, Kučera Radan, Šimša Jaromír: *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova univerzita, Brno, 2004.

¹²Od slova kareta, nikoli karta.