Kombinatorika na šachovnici

Peter „πtr“ Korcsok

Abstrakt. Táto prednáška sa zameriava na rôzne kombinatorické úlohy, ktoré sú so šachovnicou viac alebo menej spojené. Na príkladoch rôznych obtiažností si precvičíme základné metódy, ako môžeme takéto problémy zdolať.

Počas tejto prednášky sa spolu pozrieme na niekoľko príkladov, kde šachovnica vystupuje priamo v zadaní, alebo nám aspoň môže výrazne uľahčiť riešenie zadaného problému. Úlohy sú zoradené podľa náročnosti, preto nezúfaj, ak sa Ti hneď prvé z nich zdajú príliš triviálne :).

Príklady na prebudenie

Príklad 1. Na klasickú šachovnicu (8×8 políčok) sa snažíme umiestniť čo najviac veží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali.

(a) Koľko maximálne figúrok tam môžeme dať?
(b) Koľkými spôsobmi vieme tento počet veží rozmiestniť?

Príklad 2. Je možné pokryť šachovnicu $2n \times 2n$ bez dvoch protiľahlých vrcholov kockami domina tak, aby sa žiadne neprekrývali?

Príklad 3. Maximálne koľko figúrok koňa vieme rozostaviť na šachovnici 8×8, aby sme nevytvorili ohrozujúcu sa dvojicu?

Príklady na zlepšenie formy

Príklad 4. Určte maximálny počet strelcov, ktorý vieme rozmiestniť po šachovnici 8×8, aby sa žiadna dvojica neohrozovala. Ukážte, že počet všetkých takých umiestnení je druhá mocnina nejakého prirodzeného čísla.

Príklad 5. Rozhodnite, aspoň koľko výstrelov musíme vystreliť do štvorca 7×7, aby sme s istotou zasiahli loď pokrývajúcu 4×1 políčok.

Príklad 6. Je možné pokryť štvorec 10×10 tetramínami tvaru „T“ tak, aby sa žiadne neprekrývali?

Príklad 7. Šachovnicu $m \times n$ máme pokrytú pomocou kociek 2×2 a 4×1. Ukážte, že keď ľubovoľný dielik 2×2 zameníme za 4×1, nie je možné opätovne celú šachovnicu zaplniť.

Príklad 8. Na začiatku vojenskej prehliadky sa 81 vojakov rozostavilo na šachovnicu 9×9, na každé políčko práve jeden. Po zaznení rozkazu každý z nich prešiel na niektoré susedné políčko rovnakej farby. Minimálne koľko miest zostalo prázdnych?

Príklad 9. Dvaja hráči hrajú hru na čokoláde 6×4 a striedavo z nej ujedajú, pričom ani jeden nechce zobrať ľavý dolný roh. Ten, kto je práve na ťahu, si vždy zvolí ľubovoľné políčko, ktoré si vezme, a spolu s ním odoberie aj všetky ešte nezjedené kúsky vpravo a hore od vybraného miesta. Koľko rôznych tvarov môžu týmto postupom vytvoriť? (AIME 1992)

Príklad 10. 18 dominových kociek 2×1 sme uložili do štvorca 6×6. Dokážte, že tam vždy vieme nájsť dva susedné riadky alebo stĺpce, ktoré sú úplne oddelené, teda nemajú spoločnú žiadnu kocku. (MKS 2008/2009, 8. séria)

Príklad 11. Dvaja hráči striedavo hrajú na šachovnici 10×10 nasledujúcu hru. Ten, kto je práve na ťahu, si zvolí jeden z riadkov alebo stĺpcov, ktoré ešte neboli vybrané, a na všetkých 10 políčok v ňom si umiestni svoju figúrku[1]. Nájdite stratégiu pre nezačínajúceho hráča, pri ktorej bude mať na konci aspoň o 10 figúrok viac ako súper. (MKS 2009/2010, 1. jarná séria)

Príklad 12. Organizátori šachového turnaja sa rozhodli víťaza odmeniť špeciálnou šachovnicou s 1234×1234 políčkami, na ktorej by platilo:

(a) z každej dvojice stredovo súmerných[2] políčok je práve jedno čierne a práve jedno biele,
(b) v každom riadku aj každom stĺpci je rovnako veľa bielych a čiernych políčok.

Je možné takúto šachovnicu vyrobiť? (MKS 2002/2003, 4. séria)

Príklad 13. Rozhodnite, pre ktoré $n \geq 2$ je možné prejsť každé políčko šachovnice $n \times n$ práve raz, pokiaľ sa figúrkou kráľa pohybujeme striedavo „šikmo“ a „priamo“ a na začiatočnom políčku nám nezáleží. Pri ceste „šikmo“ prejdeme na susedné políčko rovnakej farby, pri pohybe „priamo“ naopak farbu meníme. (MO 56–A–III–1)

Príklady pre borcov

Príklad 14. Do ľavého dolného rohu šachovnice 50×50 sme položili hraciu kocku, ktorá pokryje práve jedno políčko. Postupne budeme kocku preklápať vždy na susedné políčko vpravo alebo hore a vždy si poznačíme číslo na vrchu kocky. Určte

[1] Ak na niektorom políčku už nejaká figúrka bola, nahradí ju svojou.
[2] Stred súmernosti je presne v strede šachovnice.

najmenšiu a najväčšiu hodnotu, ktorú môžeme dostať, keď týchto 99 čísel posčítame.

Príklad 15. Rozhodnite, či je možné prejsť kráľom celú šachovnicu 8×8, ak okrem prvého kroku prechádza len na políčka susediace s párnym počtom už navštívených miest. (Baltic Way 1999)

Príklad 16. Na šachovnicu obsahujúcu 100×100 políčok chceme umiestniť 2500 kráľov tak, aby boli splnené podmienky:

(a) žiadna dvojica kráľov sa vzájomne neohrozuje,
(b) v každom riadku aj každom stĺpci sa nachádza práve 25 kráľov.

Koľkými rôznymi spôsobmi to môžeme urobiť? Dve pozície líšiace sa rotáciou považujeme za rozličné. (IMO Shortlist 2010)

Príklad 17. Zlaté PraSiatko raz na povale objavilo veľkú šachovnicu $n\times n$, na ktorej bolo rozmiestnených niekoľko figúrok. Z nudy sa rozhodlo, že vždy, keď nájde prázdne políčko, ktoré hranou susedí s aspoň dvomi obsadenými miestami, doplní figúrku aj na prázdne miesto. Po určitom čase prekvapene zistilo, že takto zaplnilo celú šachovnicu. Koľko minimálne figúrok muselo byť na šachovnici, keď ju PraSiatko objavilo? (MKS 2003/2004, 4. séria)

Príklad 18. Figúrka princa sa po šachovnici pohybuje vždy len na políčko susediace hranou. Rozhodnite, či je možné s princom prejsť každé políčko šachovnice 8×8 práve raz, skončiť na mieste, kde sme začali, a pri tom ísť rovnako veľakrát zvislo aj vodorovne. (KMS 2008/2009, letná časť, 2. séria)

Literatúra a zdroje

[1] Archív MKS, *http://mks.mff.cuni.cz/archive*
[2] Internetové fórum Mathlinks, *http://www.mathlinks.ro*
[3] Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.
[4] Titu Andreescu, Zuming Feng: *102 Combinatorial Problems: From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, Boston, 2003
[5] Archív KMS, *http://www.kms.sk/archiv*