Kombinatorické metody v geometrii

Pavel Podbrdský

Úvod

V této přednášce se budeme zabývat kombinatorickými vlastnostmi geometrických objektů. Většinou tedy budeme dokazovat věty typu „Za jistých okolností se dané objekty už nutně musí protínat“, a pod. To koneckonců uvidíme během výkladu. V celé přednášce se budeme pohybovat v rámci d-rozměrných (eukleidovských) prostorů; pro názornou představu však vystačíme s rovinou, či (tří-rozměrným) prostorem.

Základní definice a pojmy

Definice. (Eukleidovský prostor) *Eukleidovským prostorem dimenze d ($d \in \mathbb{N}_0$) budeme rozumět množinu $\mathbb{R}^d$ všech uspořádaných d-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ reálných čísel (v případě $d = 0$ tím rozumíme jednoprvkovou množinu). Prvky eukleidovského prostoru budeme nazývat body. Na této množině máme dáno sčítání, násobení reálným číslem (obojí po složkách). Umíme tu také měřit vzdálenosti a úhly. (Vše si můžeme názorně představit na případu $d \leq 3$.)*

Definice. (Afinní podprostory) *Nechť je dán d-rozměrný eukleidovský prostor. Jeho lineárním podprostorem rozumíme libovolnou množinu, která obsahuje počátek (tj. bod $(0, 0, \ldots, 0)$) a je uzavřená na sčítání a násobení reálným číslem. Dimenzí lineárního podprostoru rozumíme jeho dimenzi ve smyslu vektorového prostoru (stačí, když to budeme chápat intuitivně). Afinním podprostorem rozumíme množinu tvaru $a + L$, kde $a \in \mathbb{R}^d$ a L je lineární podprostor $\mathbb{R}^d$. Jeho dimenzí rozumíme dimenzi příslušného podprostoru L.*

Každý bod v $\mathbb{R}^d$ lze zároveň chápat jako 0-dimenzionální afinní podprostor. Jednodimenzionální podprostory nazýváme přímky, dvojdimenzionální roviny. Nadrovinou rozumíme $d-1$-dimenzionální podprostor.

Definice. (Afinní kombinace) *Mějme body $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Jejich afinní kombinací rozumíme každý bod x tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (např. afinní kombinací dvou různých bodů lze dostat přesně body přímky procházející těmito body). Řekneme, že body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou afinně závislé, pokud některý z bodů lze dostat jako afinní kombinaci ostatních.*

Poznámka. Každých $d+2$ bodů v $\mathbb{R}^d$ je afinně závislých.

Definice. (Konvexní kombinace) *Mějme body $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Jejich konvexní kombinací rozumíme každý bod x tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (např. konvexní kombinací dvou různých bodů lze dostat přesně body úsečky spojující tyto body). Řekneme, že body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou konvexně závislé, pokud některý z bodů lze dostat jako konvexní kombinaci ostatních.*

Definice. (Konvexní množina) *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní, pokud s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje i celou úsečku spojující x a y. Jinými slovy, jsou-li $x, y \in M$ a $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, tak i $\lambda x + (1-\lambda) y \in M$.*

Definice. (Konvexní obal) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$. Konvexním obalem množiny M rozumíme nejmenší konvexní množinu, která obsahuje M. Je to tedy průnik všech konvexních nadmnožin M. Lze ji také charakterizovat, jako množinu všech konvexních kombinací bodů z množiny M. Značíme symbolem $\operatorname{conv}(M)$.*

Definice. (Uzavřené, otevřené a kompaktní množiny) *Uzavřenou množinou budeme rozumět každou množinu F, pro kterou platí: Jsou-li $x_n \in F$ a $x = \lim x_n$, pak $x \in F$. Stačí, když tento pojem budeme chápat intuitivně. Typicky je to množina, která obsahuje všechny své „hraniční“ body. Příklady uvidíme na přednášce.*

Otevřenou množinou rozumíme doplněk uzavřené množiny. Kompaktní množinou rozumíme každou uzavřenou a omezenou množinu.

To zajímavé – věty a tvrzení

Věta. (O oddělitelnosti) *Mějme dvě kompaktní konvexní podmnožiny $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$, které se neprotínají. Pak existuje nadrovina $H \subset \mathbb{R}^d$, která je (striktně) odděluje. Tj. množiny M_1 a M_2 leží v opačných (otevřených) poloprostorech určených nadrovinou H.*

Věta. (Radonovo lemma) *Mějme množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ obsahující $d+2$ bodů. Pak množinu A lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny A_1 a A_2 tak, že $\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2)$ je neprázdná. Každý bod $x \in \operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2)$ se nazývá Radonův bod množiny A.*

Věta. (Caratheodoryova) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak každý bod $x \in \operatorname{conv}(M)$ lze dostat jako konvexní kombinaci nejvýše $d+1$ bodů množiny M.*

Hellyho věta

Věta. (Hellyho – konečná verze) *Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \geq d+1$ je konečný systém konvexních množin takový, že libovolných $d+1$ z nich má neprázdný průnik. Pak*

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset.$$

Věta. (Hellyho – nekonečná verze) *Nechť $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ je (libovolně velký[2]) systém kompaktních konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ takový, že každých $d+1$ z nich má neprázdný průnik. Pak*

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \neq \emptyset.$$

Brouwerova věta

Tato věta vlastně do kombinatorické geometrie nepatří; patří spíše do oblasti topologie a má spoustu zajímavých aplikací. Pro nás je na ní zajímavé, že lze dokázat pomocí elementárních kombinatorických metod.

Věta. (Brouwerova) *Nechť B je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^d$ a $f : B \mapsto B$ spojité zobrazení. Pak f má pevný bod, tj. existuje řešení rovnice*

$$f(x) = x.$$

Poznámka. V této větě lze uzavřenou kouli B zaměnit za něco „podobného kouli“, např. uzavřenou krychli, simplex, či libovolnou kompaktní konvexní množinu.

Pro důkaz této věty se nám bude hodit následující (čistě kombinatorické) lemma:

Věta. (Spernerovo lemma – rovinná verze) *Nakresleme do roviny velký trojúhelník $A_1A_2A_3$ a rozdělme jej libovolně na konečný počet menších trojúhelníčků; žádný trojúhelníček nesmí mít vrchol uvnitř strany jiného trojúhelníčku. Přiřaďme každému vrcholu v obrázku nějaké z čísel $1, 2, 3$ tak, že vrchol A_i bude označen číslem i, $i = 1, 2, 3$ a na straně A_iA_j budou použita pouze čísla i a j. Mimo tato pravidla je očíslování naprosto libovolné.*

Pak na obrázku existuje trojúhelníček (tj. trojúhelník, který již není rozdělen), jehož vrcholy jsou očíslovány čísly $1, 2, 3$.

[2] Množin musí být však alespoň $d+1$.

To nejzajímavější – příklady

(1) *Pás šířky* w je část roviny ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami se vzdáleností w. *Šířka* množiny $X \subset \mathbb{R}^2$ je nejmenší šířka pásu obsahujícího X. Dokažte, že kompaktní konvexní množina šířky 1 obsahuje úsečku délky 1 v každém směru.

(2) Dokažte, že má-li průnik každé trojice ze souboru $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ kompaktních konvexních množin šířku alespoň 1, pak i množina $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ má šířku alespoň 1.

(3) Jestliže průnik každých 4 z konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n \subset \mathbb{R}^2$ $(n \geq 4)$ obsahuje nějakou polopřímku, pak také průnik všech obsahuje polopřímku. Dokažte.

(4) Dokažte, že jsou-li body množiny A z Radonova lemmatu v obecné poloze (tj. každých $d+1$ z nich je afinně nezávislých), pak existuje právě jeden Radonův bod množiny A.

(5) Jaké jsou možné průniky dvou (dvoudimenzionálních) rovin v $\mathbb{R}^4$? Jaký je „typický případ“. Jak je to v případě dvou nadrovin? Zkuste se zamyslet nad případem k a l-dimenzionálních afinních podprostorů $\mathbb{R}^d$.

(6) Buď $C \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní konvexní množina, buď $p \in C$. Dokažte, že existuje přímka l procházející bodem p taková, že úsečka $l \cap C$ je nejdelší ze všech úseček obsažených v C a rovnoběžných s l.

(7) Buďte $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ konečné množiny bodů, předpokládejme, že pro každou 4-prvkovou podmnožinu $S \subset X \cup Y$ lze množiny $S \cap X$ a $S \cap Y$ (striktně) oddělit přímkou. Dokažte, že množiny X a Y lze (striktně) oddělit přímkou.

(8) Mějme množinu bodů v rovině takovou, že každé tři z nich leží v nějakém uzavřeném kruhu s jednotkovým poloměrem. Dokažte, že všechny dané body leží ve společném uzavřeném kruhu s jednotkovým poloměrem.

(9) Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konečná množina bodů. Dokažte, že existuje centrum množiny A, tj. takový bod $x \in \mathbb{R}^d$, že každý uzavřený poloprostor, jehož hranice prochází x obsahuje alespoň $\frac{1}{d+1}|A|$ bodů z množiny A.

(10) Pokuste se zformulovat a dokázat obecnou verzi Spernerova lemmatu.

Literatura

Při přípravě na tuto přednášky jsem částečně čerpal z přednášky J. Matouška, ke které lze najít (anglicky psané) texty na webu na adrese (soubory ve formátu zagzipovaný postscript) `http://www.ms.mff.cuni.cz/acad/kam/matousek/kvgI/dg.html`.

Částečně jsem také čerpal z pěkné knížky J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.