Kombinatorické identity

PETER „πTR“ KORCSOK

ABSTRAKT. Táto prednáška predvádza základné kombinatorické metódy dokazovania. V prvej časti je každá technika stručne popísaná a doplnená jednoduchým riešeným príkladom, druhú časť poskytuje čitateľovi zbierku cvičení na aplikovanie uvedených spôsobov.

Úvod

Počas tejto prednášky si ukážeme netradičné spôsoby, ako dokázať známe alebo aj neznáme rovnosti. Pri tom budeme využívať hlavne kombinatorické reprezentácie, ale občas si pomôžeme aj bežnejšími dokazovacími metódami. Ďalej si predvedieme často používané *počítanie dvoma spôsobmi* a vyskúšame si ho aplikovať v rôznych prípadoch. Na záver nebude chýbať viacero príkladov, kde si predvedené techniky dostatočne precvičíme.

Základné znalosti

Na začiatok si pripomeňme niektoré definície a jednoduchšie rovnosti:

Definícia. *Kombinačné číslo* $\binom{n}{k}$ môžeme definovať dvoma rovnocennými spôsobmi:

(1) algebraicky pomocou výrazu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,
(2) kombinatoricky ako počet všetkých k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny.

Tvrdenie. (Binomická veta) *Pre ľubovoľné a, b a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

KĽÚČOVÉ SLOVÁ. kombinačné čísla, kombinatorický dôkaz, počítanie dvoma spôsobmi

Tvrdenie. *Pre kombinačné čísla platia nasledujúce identity:*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \qquad \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Kombinatorické dôkazy

V tejto časti si ukážeme niekoľko trikov, ako si výrazne uľahčiť dokazovanie danej identity:

(1) Metóda *bijekcie*: ak máme dve konečné množiny A, B a máme dokázať, že majú rovnako veľa prvkov, môžeme nájsť bijekciu, ktorá jednoznačne prevedie prvky množiny A do množiny B.

Príklad. Dokážte:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Riešenie. Chceme nájsť funkciu, ktorá každú k-prvkovú podmnožinu jednoznačne zobrazí na nejakú $(n-k)$-prvkovú podmnožinu. Toto spĺňa napríklad $f(A) = M \setminus A$ pre $A \subseteq M$, $|A| = k$. □

(2) Metóda *zoznamu* je založená na tom, že si všetky prvky systematicky zapíšeme do určitého zoznamu, ktorý následne vhodne rozdelíme do skupín. Spočítaním cez tieto skupiny dostaneme požadovaný výsledok.

Príklad. Dokážte:

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

Riešenie. Ľavá strana predstavuje počet prvkov vo všetkých $(k+1)$-prvkových podmožinách $(n+1)$-prvkovej množiny. Vpravo si naopak vyjadríme, v koľkých takých podmnožinách sa nachádza jeden zvolený prvok $m \in M$. Sčítaním cez všetky prvky dostávame platnosť zadanej rovnosti. □

(3) Ďalšou používanou metódou je *rozklad do tried*, kde danú množinu rozdelíme do niekoľkých disjunktných tried, ktorých veľkosť určíme jednoduchšie. Následne s využitím bijekcie a pravidla súčtu určíme aj veľkosť pôvodnej množiny.

Príklad. Dokážte:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Riešenie. Uvažujme množinu $M = \{m_0, m_1, \dots, m_n\}$ a nech S obsahuje všetky $(k+1)$-prvkové podmnožiny M. Zjavne $|S| = \binom{n+1}{k+1}$.

Keď ale vyberieme do S_1 tie podmnožiny, ktoré obsahujú prvok m_0, a do S_2 tie, ktoré ho neosahujú, musí platiť $|S_1| + |S_2| = |S|$. Pri tom ale nie je zložité ukázať, že $|S_1| = \binom{n}{k}$ a $|S_2| = \binom{n}{k+1}$. Dosadením do predchádzajúcej rovnosti dostáveme výraz v zadaní. □

(4) Pri zdolávaní identít môžeme využiť aj metódu *nápisov*, kde sa snažíme pomocou postupnosti písmen popísať zadané výrazy.
(5) Na záver si ešte spomenieme aj metódu *ciest v štvorcovej sieti*. Neznáme výrazy si reprezentujeme ako počty ciest v štvorcovej sieti medzi vrcholmi A a B. Občas budeme stavať určité prekážky alebo naopak kontrolné body, ktorými musíme vždy prejsť.

Počítanie dvoma spôsobmi

Jednu dôležitú dôkazovú metódu sme si nespomenuli, aj keď sme ju už využili. Pri nej sa snažíme na jeden výsledok prísť dvoma (alebo aj viacerými) cestami, pričom medzi výslednými vzorcami musí nutne platiť rovnosť.

Príklad. Dokážte:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n.$$

Riešenie. Algebraický dôkaz je pomerne jednoduchý: stačí dosadiť $a = 1$, $b = 2$ do binomickej vety. My sa ale budeme venovať tomu kombinatorickému.

Majme n-prvkovú množinu M, pričom nás zaujíma počet usporiadaných dvojíc (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq M$. Po zvolení pevného i máme $\binom{n}{i}$ možností pre výber B, následne 2^i možností pre A. Sčítaním cez všetky prístupné hodnoty i dostávame ľavú stranu rovnosti.

Pozrime sa teraz, koľko možností máme pre ľubovoľný prvok $m \in M$: buď $m \in A$, alebo $m \in B \setminus A$, alebo $m \in M \setminus B$. Pretože umiestnenia jednotlivých prvkov sa vzájomne neovplyvňujú, spolu dostávame 3^n možných rozdelení. □

Túto metódu si teraz čo najviac precvičíme.

Príklady

Príklad 1. Dokážte pre ľubovoľné prirodzené $k \le r \le n$:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Príklad 2. Dokážte pomocou rozkladu do tried alebo ciest v štvorcovej sieti:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Príklad 3. Dokážte metódou bijekcie alebo využitím nápisov:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Príklad 4. Dokážte:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}.$$

Príklad 5. Dokážte:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i} = \binom{n}{m} 2^m.$$

Príklad 6. Dokážte:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Príklad 7. Dokážte pre ľubovoľné $k < m$ s využitím metódy ciest v sieti:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k}\binom{m+n-k-i-1}{m-k-1} = \binom{m+n}{m}.$$

Príklad 8. Dokážte pre ľubovoľné $n \le m$:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{m-1}{i-1} = \binom{m+n-1}{m}.$$

Príklad 9. Vo fronte pred kinom stojí $n + m$ ľudí, pričom n z nich má päťkorunu a m desaťkorunu. Lístok stojí presne 5 korún a na začiatku v pokladni nie sú žiadne peniaze. Pomocou ciest v štvorcovej sieti určte, koľkými spôsobmi sa môžu zoradiť, aby nikto nemusel čakať na výdavok, ak ľudí s rovnakou mincou nerozlišujeme.

Príklad 10. Určte hodnotu výrazu:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} = 1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \cdots + n^2 \binom{n}{n}.$$

Príklad 11. S využitím metódy ciest v štvorcovej sieti určte počet korektných uzátvorkovaní s n pármi zátvoriek.

Literatúra a zdroje

V prvom rade sa chcem poďakovať Jardovi Hančlovi, ktorého príspevok *Kombinatorické identity* sa stal predlohou tohto textu. Príklady som čerpal aj z príspevkov Martina Tancera *Počítání dvěma způsoby* a Zuzky Safernovej *Dvojí počítání.*

[1] Knižnica PraSiatka: *http://mks.mff.cuni.cz/library/*
[2] Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova univerzita, Brno, 1997
[3] Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2009