Kombinatorické identity

Jaroslav Hančl

Úvod

Hlavním cílem této přednášky bude seznámit posluchače s netradičními důkazy známych i neznámých idetit. Především se budeme věnovat kombinatorickým reprezentacím, ale ukážeme si i řadu pěkných algebraických. V druhé části se naučíme používat metodu zvanou „počítání dvěma způsoby“ a předvedeme si řadu aplikací. Pokud na konci zbyde čas, tak můžeme zabrousit i do velmi složitých identit.

Co by se již hodilo vědět

(1) *Kombinační číslo* $\binom{n}{k}$ lze jednak definovat algebraicky vzorcem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ale také kombinatoricky, jakožto počet všech k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Obě tyto definice jsou ekvivalentní.

(2) *Binomická věta* tvrdí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

(3) No a určitě se budou hodit i některé známe a lehké identitky:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k}.$$

Kombinatorické důkazy

V této kapitolce si ukážeme, jak lze interpretovat danou identitu tak, aby se poté její důkaz stal hračkou. Nabídnu zde několik metod:

Metoda *bijekce*. Chceme-li ukázat, že dvě konečné množiny A, B mají stejný počet prvků, nalezneme bijekci, která jednoznačně zobrazuje prvky množiny A na prvky množiny B. Pro názornost si dokažme identitu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Jinými slovy chceme dokázat, že počet k-prvkyových podmnožin n-prvkové množiny M je stejný jako počet $(n-k)$-prvkových podmnožin. Jelikož ale bijekce $T: A \to M \setminus A$ pro každou $A \subseteq M$ dané podmínky splňuje, daná identita platí.

Metoda *seznamu* spočívá ve spočtení počtu všech prvků ve vhodně uspořádaných skupinách. Dokažme si například:

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$$

Číslo $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$ udává počet prvků všech $(k+1)$-prvkových podmnožin $(n+ + 1)$-prvkové množiny M. Spočteme-li si pro každý prvek $m \in M$ v kolika $(k+ + 1)$-prvkových množinách se vyskytuje, dostáváme se k číslu $\binom{n}{k}$. Sečtením přes všechny prvky $m \in M$ pak dostaneme kýženou identitu.

Metoda *rozkladu do tříd* je založená na rozporcování množiny na několik tříd a následném využití bijekce a pravidla součtu. Dobře je to vidět na následujícím důkazu identity:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Nejprve rozdělme všechny $(k+1)$-prvkové podmnožiny dané $(n+1)$-prvkové množiny $M = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ do skupin S_1 a S_2 tak, že podmnožiny z S_1 vždy obsahují prvek a_0, zatímco podmnožiny z S_2 prvek a_0 neobsahují. Z této reprezentace se snadno zjistí, že $|S_1| = \binom{n}{k}$ a $|S_2| = \binom{n}{k+1}$. Musí ale též platit $|S_1| + |S_2| = \binom{n+1}{k+1}$ a proto dokazovaná identita platí.

Dále se ještě používá metoda *nápisů*, ve které se snažíme reprezentovat dané výrazy posloupnostmi písmen. A nakonec, moje nejmilejší metoda, metoda *cest ve čtvercové síti*. Zde budeme reprezentovat neznámé výrazy jako počty cest z bodu C do bodu D, budeme stavět barikády a překonávat příkrá stoupání, avšak nakonec zjistíme, že jsme zase jenom v Pascalově trojůhelníku.

Počítání dvojím způsobem

Pozorný a znalý čtenář si již zajisté všiml, že tato metoda byla v přadešlé kapitole použita. Ukažme si proto její plnou krásu na následujícím důkazu jinak jednoduché identity:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

(i) Algebraický důkaz je jednoduchý. Stačí dosadit do Binomické věty za $a = 1$ a $b = 2$ a jsme hotovi.

(ii) Kombinatorický důkaz je zajímavější. Vezměme si n-prvkovou množinu M a počítejme počet všech dvojic (A, B) podmnožin M, pro které platí

$A \subseteq B$. Pro dané $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ můžeme vybrat k-prvkovou množinu B celkem $\binom{n}{k}$-krát a její podnmožinu A celkem 2^k-krát. Proto hledaný počet N všech dvojic (A, B) je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. Podíváme-li se na množinu N jinak, dostaneme, že každý m prvek množiny M musí být v jedé z množin: $m \in A, m \in B \setminus A, m \in M \setminus B$. Proto pro každý $m \in M$ máme 3 možnosti a celkově tedy 3^n možností pro výběr (A, B).

Metoda použitá v předchozím kombinatorickém důkaze je typický představitel počítání dvojím způsobem. Snažíme-li se takto dokázat nějakou identitu, je potřeba si chytře zvolit vhodnou množinu (v našem případě množinu N) a pak ještě mazaněji dvěma zcela odlišnými způsoby spočítat počet jejich prvků.

Příklady

Příklad 1. Dokažte:

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Příklad 2. Metodou rozkladu do tříd nebo metodou cest ve čtvercové síti dokažte:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Příklad 3. Metodou bijekce dokažte:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Příklad 4. Dokažte:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

Příklad 5. Metodou nápisu dokažte:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

Příklad 6. Metodou cest ve čtvercové síti dokažte identitu:

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k} \binom{m+n-k-i-1}{m-k-1}, \text{ pro } k < m$$

Příklad 7. Dokažte:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{m}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n-m}{0}=\binom{n}{m}2^m$$

Příklad 8. Dokažte:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n}{n+1}$$

Literatura

Nejprve bych chtěl poděkovat Martinu Tancerovi, jehož příspěvek „Počítání dvojím způsobem" se stal předlohou pro tuto přednášku. Naleznete ho na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`.

[1] Kolektiv: *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova Univerzita, Brno, 1991

[2] Josef Kaucký: *Kombinatorické identity*, Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1975