Kombinatorické hry, Nim a SG funkce

Kuba Krásenský

Abstrakt. První část příspěvku představuje základní způsoby řešení kombinatorických her a ilustruje je na velkém množství příkladů. Druhá část se věnuje hře Nim, sčítání her a Spragueově–Grundyho funkci. Příspěvek je zkrácenou verzí PraSečího seriálu z 32. ročníku napsaného Alčou Skálovou.

Nejhravější oblastí olympiádní matematiky je pochopitelně teorie (kombinatorických) her. Nějaké hry zná každý z nás, ale zdaleka ne všechny je možné zkoumat a zcela vyřešit pomocí elementárních nástrojů – podívejme se proto nejprve na to, co odlišuje hry kombinatorické od her jiných, ať už míčových, společenských, maticových, nebo divadelních.

Kombinatorickou hrou nazveme hru s následujícími vlastnostmi:

(1) Hrají dva *hráči* proti sobě.
(2) Hráči se pravidelně střídají. Není-li uvedeno jinak, hráč nesmí vynechat tah.
(3) Je dáno (zpravidla konečně mnoho) *pozic*, ve kterých se hra může nacházet. Jedna z pozic je označena jako *startovní*. Pozicím, ve kterých hra končí, a to buď *výhrou* jednoho z hráčů a *prohrou* druhého, nebo *remízou*, se říká *koncové*.
(4) Pravidla hry určují pro každého hráče všechny přípustné *tahy* z každé pozice.
(5) Ve hře nejsou žádné náhodné prvky.
(6) Oba hráči mají *úplnou informaci*.
(7) Oba hráči jsou *racionální*.

Často se ještě přidává podmínka, že hra má být *konečná*, čili má skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Strategie

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry.[1] *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak chytře hraje jeho protihráč (tedy bez ohledu na protihráčovu strategii). Obdobně, má-li jeden z hráčů *neprohrávající strategii*, znamená to, že pokud se jí bude držet, hru neprohraje, ať jeho soupeř hraje sebelépe. Hra tedy buď skončí vítězstvím tohoto hráče, nebo bude jejím výsledkem remíza.

[1] Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.

Uvědomme si, že obecně existují dvě formy remízy (obě mohou nastat například v šachách). Buď hra přímo skončí v pozici, kterou pravidla posoudí jako remízovou, nebo neskončí v konečném počtu tahů – neboli nikdy se nedostane do koncové pozice.

Vyhrávající a prohrávající pozice

V této kapitole budeme uvažovat pouze konečné hry nepřipouštějící remízu. V takových hrách můžeme každou pozici označit buď jako vyhrávající (V), nebo jako prohrávající (P). Jak už název napovídá, nachází-li se hráč ve *vyhrávající pozici*, pak (bude-li hrát, jak nejlépe lze) hru vyhraje. Naopak, nachází-li se v *prohrávající pozici*, hru nutně prohraje (pokud jeho soupeř neudělá chybu).

Nejlepší bude osvětlit si právě zavedené pojmy na příkladu.

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

Z úvah o vyhrávajících a prohrávajících pozicích vyplývá následující věta, kterou často používáme, aniž bychom si toho byli vědomi.

Věta. (O vyhrávající strategii) *V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Zamyšlení. Rozmyslete si, jak je potřeba přeformulovat předešlou větu a jak změnit její důkaz, pokud pravidla remízový závěr připustí. Také si promyslete, proč v předpokladech věty potřebujeme konečnost.

Když už známe všechny podstatné pojmy, můžeme se vesele pustit do hraní rozličných kombinatorických her. V následujících podkapitolách si postupně představíme různé metody hledání vyhrávajících a neprohrávajících strategií.

Zpětný rozbor

V podkapitole o vyhrávajících a prohrávajících pozicích jsme se naučili, jak v libovolné konečné kombinatorické hře nalézt vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů (máme-li dostatečnou výpočetní kapacitu). Tuto metodu budeme nazývat *zpětný rozbor*, cizím slovem *backtracking*, neboť hru vlastně (vy)řešíme od konce.

Zkusme s její pomocí vyřešit následující hry. Není-li řečeno jinak, pak „vyřešením“ hry se míní nejen nalezení vyhrávající strategie pro jednoho z hráčů, ale i její popsání.

Hra 2. Na stole leží 15 sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat 1 až 4 sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 3. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranná věž – může se pohybovat jen doleva nebo dolů. Hráči se střídají v tazích, přičemž si mohou vybrat, o kolik polí (minimálně však o jedno) pohnou věží v jednom z povolených směrů. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 4. Na stole leží hromádka n sirek, kde n je libovolné přirozené číslo. Hráči z ní sirky střídavě odebírají a kdo nemůže hrát, prohrál. Tentokrát ale může hráč v jednom tahu odebrat 1, 2, nebo 4 sirky. Který hráč má (v závislosti na n) vyhrávající strategii? A co kdyby se směly odebírat všechny mocniny dvojky?

Hra 5. Pravidla jsou stejná jako v předchozí hře, ale kdo nemůže hrát, vyhrál.

Hra 6. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranný král (smí se pohybovat právě o jedno pole dolů, doleva nebo doleva dolů). Hráči jím střídavě táhnou a kdo nemůže hrát, prohrál.

Kradení strategií

Každý ví, že v šachách, dámě i piškvorkách má výhodu ten hráč, který začíná. Dokázat to ale umíme jen o jedné z těchto her – uhodnete, o které?

Tvrzení. *V piškvorkách má první hráč neprohrávající strategii.*

Principu, který se využívá v důkazu, se říká *kradení strategií* a je možné jej využít i při řešení dalších her.

Hra 7. (Přičítání dělitelů) Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele.[2] Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

Hra 8. (Dvojité šachy) Pravidla jsou stejná jako v klasickém šachu s jediným rozdílem – hráč, který je na řadě, dělá tahy dva.

Hra 9. (Mazání dělitelů) Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, smaže nějaké číslo a spolu s ním všechny jeho dělitele, kteří na tabuli ještě zbyli. Prohrává hráč, který nemůže táhnout – tedy ten, na kterého zbyla čistá tabule.

Symetrie

Následující technika se dá použít ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické – umožňují hráči kopírovat soupeřovy tahy. Základní myšlenka by se dala popsat slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já".

Hra 10. (Mince na stole) Loupežníci Kenny a Jarda ukořistili truhlu plnou zlatých kulatých mincí a rozhodli se zahrát si o ně hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na řadě, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu.[3] Začíná Kenny. Prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii? (MKS 27–2–5)

Hra 11. (Lámání čokolády) Riikka a Jussi dostali velkou (200 gramů, 4×8 kostiček) finskou hruškovou čokoládu a rozhodli se zahrát si s ní následující hru. Ve

[2] Vlastní dělitelé jsou dělitelé ostře menší než číslo samotné. Např. vlastní dělitelé čísla 12 jsou čísla 6, 4, 3, 2, 1.

[3] Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde alespoň jedna mince.

svém tahu může hráč rozlomit (láme se rovně po vyznačených čárách) libovolný kus čokolády, který ještě rozlomit lze. Kdo rozlomí poslední kousek, vyhrál a může celou čokoládu sníst. Kdo vyhraje, začíná-li lámat Riikka a pravidelně se s Jussim střídají?

Hra 12. (Lámání čokolády bez 1×1) Na Vánoce Riikka s Jussim dostali jinou velkou (4×8 kostiček) finskou čokoládu, tentokrát peprmintovou. Protože minule se jim hra moc nelíbila, přidali pravidlo, že se nesmí ulamovat dílky velikosti 1×1. Kdo nemůže v souladu s pravidly táhnout, prohrál. Má začínající Riikka vyhrávající strategii, nebo si na čokoládě pochutná pro změnu Jussi? (MKS 21–7–3)

Hra 13. Dvě šachu znalá PraSátka – Kuba a Anička – střídavě pokládají jezdce své barvy na šachovnici tak, aby se žádná dvojice znepřátelených jezdců neohrožovala. Kdo nemůže položit dalšího jezdce, prohrál. Kuba je galantní a nechá Aničku začínat.

Hra 14. Je dána tabulka o rozměrech 17×68 políček. Hráč si ve svém tahu vybere nějaký podčtverec tabulky, ve kterém ještě není vybarveno žádné políčko, a celý ho vybarví. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Párování a obarvování

Není-li možné nalézt ve hře takovou symetrii, která by nám dovolila použít předchozí metodu, můžeme zkusit metodu *párování*. Myšlenka je stále stejná – „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah“. Často se tak děje rozdělením pozic do párů, odtud také název metody. Zahraje-li soupeř na jednu z pozic v páru, já zahraji na druhou. Další možností je rozdělení pozic/tahů do obecnějších skupin – viz následující příklad.

Hra 15. (Proužek čísel) Na proužku papíru je za sebou napsáno $2n$ čísel, kde n je libovolné přirozené číslo. Mišo s Háňou čísla postupně odstřihávají – ten, který je na řadě, si vybere jeden ze dvou konců a číslo na něm si ustřihne. Na konci oba sečtou všechna čísla, která si pro sebe ustřihli, a kdo má větší součet, vyhrál. Je-li součet stejný, nastává remíza. Který z nich má neprohrávající strategii, když Háňa začíná a pravidelně se v tazích střídají?

Hra 16. (Piškvorky do čtverce) Lukáše s Viktorem už přestalo bavit hrát při hodinách obyčejné piškvorky, a tak vymysleli obměnu – hrají na čtverečkovaném papíře 10×10. V každém tahu hráč nakreslí svůj symbol do volného pole. Lukáš vyhraje, pokud vytvoří ze svých symbolů čtverec 2×2, a Viktor vyhraje, když se mu v tom podaří zabránit. V tazích se pravidelně střídají, Lukáš začíná. Který z nich má vyhrávající strategii?

Hra 17. (Razítka) Vejtek se z dlouhé chvíle pustil do následující hry. Postupně dává na prázdná šachovnicová pole razítka, střídavě červené a zelené, a to tak, že nově orazítkované pole musí hranou sousedit s polem, které bylo orazítkováno těsně před ním. První – zelené – razítko může dát Vejtek kamkoliv. Prohrává ta barva, jejíž razítko už Vejtek nikam dát nemůže. Během celé hry Vejtek samozřejmě hraje co nejlépe podle toho, kterou barvu zrovna zastupuje – je-li na tahu zelené razítko, hraje Vejtek v jeho prospěch, a je-li na tahu razítko červené, pak hraje ve prospěch červeného.

Hra 18. (Trojúhelníkové piškvorky) Dva hráči hrají piškvorky na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře a střídají se v tazích. Ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu (směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě) alespoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.

Zkuste si sami!

Podstatnou částí řešení rovněž bývá přijít na to, kterou metodu použít. Proto v této podkapitole najdete směs úloh, u kterých vám nikdo předem neprozradí, jakou metodou se mají řešit. Úlohy jsou přibližně seřazené podle obtížnosti.

Hra 19. (Dělitelnost sedmi) Dva hráči píší dvaceticiferné číslo tak, že zleva doprava střídavě připisují jednu cifru. První hráč vyhraje, pokud výsledné číslo nebude dělitelné sedmi. Druhý vyhraje, pokud dělitelné sedmi bude.

Hra 20. (Dělitelnost třinácti) Stejná hra jako předchozí, pouze vyměníme číslo 7 za 13.

Hra 21. (Plus minus) V řadě za sebou je napsáno několik minusů. Matěj s Jonášem střídavě překreslují jeden až dva sousední minusy na plus. Vyhraje ten, který překreslí poslední minus.

Hra 22. (Plus minus podruhé) Ema se rozhodla předchozí hru mírně pozměnit – minusy napsala do kruhu (tedy každé znaménko mělo na začátku dva sousedy), zbylá pravidla ponechala stejná.

Hra 23. (Kocouři) Dva kocouři dostali řetěz z n buřtů a střídavě přehryzávají spojnice mezi nimi. Buřty, které ve svém tahu osamostatní (tedy ty, které už nebudou spojeny s žádným jiným buřtem), snědí. Vyhraje ten kocour, který sní více buřtů. Řešte postupně pro $n = 6$, $n = 7$, libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Hra 24. (Šestiúhelníky) Helča s Alčou se neznámo kde dostaly k čokoládám ve tvaru pravidelného šestiúhelníku. Každá čokoláda je rozdělena na trojúhelníkové dílky. Hráčky si vybraly jednu čokoládu o hraně délky n a hrají s ní následující hru. Ta, která je na tahu, rozlomí (láme se rovně po vyznačených čárách) čokoládu na dvě části, z nichž jednu sní a druhou předá zpátky soupeřce. V tazích se pravidelně střídají, začíná Helča. Kdo nemůže táhnout, prohrává.

Hra 25. (Dvě hromádky) Šavlík s Mončou mají dvě (ne nutně stejně početné) hromádky kávových bonbónů. Hráč, který je na tahu, sní všechny bonbóny z jedné hromádky a druhou hromádku rozdělí na dvě – dle vlastního uvážení, ale v obou nových hromádkách musí být alespoň jeden bonbón. Pravidelně se střídají v tazích.

Kdo nemůže táhnout (což nastane právě tehdy, bude-li na obou hromádkách po jednom bonbónu), prohrál.

Hra 26. (Chomp) Tabulka čokolády je rozlámána na kostičky. Kostička v levém dolním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku, sní ji a spolu s ní sní rovněž všechny kostičky v pomyslném obdélníku, jehož levým dolním rohem je právě vybraná kostička.[4] Hráči se pravidelně střídají v tazích. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, je-li čokoláda

(i) čtvercová,
(ii) obdélníková.

Hra 27. (Barvení bodů) Pepa a Mirek obarvují body v rovině. Začíná Pepa obarvením jednoho bodu oranžově, poté Mirek obarví 100 bodů žlutě, Pepa jeden oranžově, Mirek 100 žlutě, … Přebarvovat již jednou obarvené body není možné. Dokažte, že se Pepovi podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy.

Hra 28. (Piškvorky 2 : 1) Majkl s Ančou hrají piškvorky na nekonečně velkém papíře s následující úpravou pravidel. Začínající Anča v každém svém tahu nakreslí jeden křížek, zatímco Majkl nakreslí v každém tahu dvě kolečka. Majkl vyhraje, když vytvoří nepřerušenou řadu sta koleček – buď svisle, nebo vodorovně. Anča se mu v tom samozřejmě snaží zabránit. Dokažte, že Majkl má vyhrávající strategii.[5]

Hra Nim

Hra Nim je jednou z nejznámějších kombinatorických her. Nejde o nic jiného, než o odebírání[6] sirek, jehož obměny jsme potkali v minulé kapitole. Základní varianta hry je následující:

Hra 29. (Nim) Na stole je n hromádek, $n \in \mathbb{N}$, obsahujících postupně x_1 až x_n sirek. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek, minimálně však jednu. Hráč, který nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Pro hru s n hromádkami a počty sirek $x_1, \ldots, x_n$ budeme pozice zapisovat ve tvaru $(x_1, \ldots, x_n)$.

Cvičení 30. Vyřešte hru pro případ jedné a dvou hromádek.

Kdo si zkusil „ručně" rozebírat možnosti, které nastanou při hraní Nimu o třech hromádkách, záhy zjistil, že je těžké vypozorovat ve struktuře vyhrávajících a prohrávajících pozic nějaký vzor. Naštěstí existuje metoda, jak i pro hromádky s větším počtem sirek rychle určit, zda se jedná o V, nebo P pozici. A co víc! Stejná metoda funguje nejen pro tři hromádky, ale i pro čtyři, pět, … Pro její pochopení je potřeba zavést Nim-součet. Abychom jej odlišili od klasického součtu, budeme místo symbolu

[4] Tedy včetně kostičky samotné a kostiček přímo napravo a nahoru od ní.

[5] Jak víme, obecně má u nekonečných her jeden z hráčů pouze neprohrávající strategii. V této hře si ale Majkl umí zajistit výhru.

[6] Však také samotný název hry nejspíš pochází z německého „Nimm!", tedy „Ber!".

$+$ používat symbol $\oplus$. Budeme také využívat zápis čísel ve dvojkové soustavě, tj. například $11 = (1011)_2$.

Definice 31. (Nim-součet) *Nim-součtem* čísel $(x_m \dots x_0)_2$ a $(y_m \dots y_0)_2$ je takové číslo $(z_m \dots z_0)_2$, že pro každé $k = 0, 1 \dots, m$ platí $z_k = x_k + y_k \pmod 2$, neboli $z_k = 1$, pokud $x_k + y_k = 1$, a $z_k = 0$ jinak. Píšeme

$$(x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2.$$

Pro názornost si můžeme sčítance zapisovat pod sebe:

$$\begin{array}{r} 11010_2 \\ \oplus\, 1010011_2 \\ \hline 1001001_2 \end{array}$$

Tvrzení. *Pro Nim-součet libovolných tří nezáporných celých čísel x, y, z platí*

(i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ (asociativita)
(ii) $x \oplus y = y \oplus x,$ (komutativita)
(iii) $0 \oplus x = x,$ (neutrální prvek)
(iv) $x \oplus x = 0,$ (opačný prvek)
(v) $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y.$ (jednoznačnost opačného prvku)

Díky vlastnosti (i) nezáleží na pořadí sčítání, a tedy budeme přebytečné závorky vynechávat. Bod (iv) znamená, že v Nim-sčítání je každý prvek opačný sám k sobě. Bod (v) budeme často mlčky využívat při hledání „vítězných“ tahů (tahů vedoucích do P pozic).

Tvrzení. (Pravidlo krácení) *Pokud pro nezáporná celá čísla x, y, z platí rovnost $x \oplus y = x \oplus z$, potom nutně $y = z$.*

Cvičení. Pro jaká x, y platí, že $x \oplus y = x + y$?

Jak vyhrát Nim

Následující větu dokázal v roce 1902 Charles L. Bouton. Na první pohled není jasné, jak spolu souvisí Nim (Hra 29) a binární zápis čísel, ale nenechte se tím zmást. Funguje to!

Věta. (Bouton) *Ve hře Nim s n hromádkami je pozice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prohrávající právě tehdy, když je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek roven nule, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.*

Poznámka. Díky předchozí větě můžeme nejen rychle určit, je-li daná pozice V, či P, ale také kýžený tah z V pozice do P pozice najít. Zkusme si to na příkladu.

Cvičení. Jak spolu souvisejí hry (a, b, c) a $(a, b, c, 10, 10)$ pro libovolná přirozená čísla a, b, c?

Cvičení. Znáte-li pozice ve hře $(3, 5, 6)$ a nyní hrajete hru $(3, 5, 6, 9, 13, 21)$, je nutné rozebírat celou hru, nebo by stačilo zjistit, jak se hraje $(9, 13, 21)$ a „hrát každou hru zvlášť“? Fungovalo by to i v případě, že by pozice $(3, 5, 6)$ nebyla prohrávající?

Nim v převleku

Ve chvíli, kdy umíme hrát (a z každé vyhrávající pozice také skutečně vyhrát) Nim, umíme rázem hrát širokou škálu dalších her (alespoň teoreticky), neboť velká část konečných kombinatorických her se dá na Nim převést. Co to přesně znamená a jak se něco takového dokáže, si povíme v dalších podkapitolách. Teď zkusme najít vyhrávající strategie v následujících hrách. Nápověda je jasná – alespoň zčásti je v nich ukrytý Nim.

Hra 32. (Želvy) V řadě za sebou stojí/leží n želv. Každá želva buď stojí, tedy je nahoru krunýřem, nebo je vzhůru nohama. Dva hráči střídavě želvy obracejí. V jednom tahu si hráč vybere želvu, která je vzhůru nohama, obrátí ji nahoru krunýřem, a pokud chce, může ještě převrátit jednu libovolnou želvu nalevo od ní – ať už je nahoru krunýřem, nebo nohama. Hráč, který už nemůže převrátit žádnou želvu (všechny stojí na nohou), prohrál.

Hra 33. Mějme pásek polí očíslovaných $0, 1, 2, 3, \ldots$ a na pásku konečný počet mincí. Každá mince je na nějakém políčku, přičemž na jednom políčku jich může být i více. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere nějakou minci a posune ji na libovolné pole nalevo od původního. S mincemi, které leží na nultém poli, už nejde hrát. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 34. (Northcott) Northcottova hra se hraje na šachovnici, na jejímž každém řádku je umístěný právě jeden bílý kámen a právě jeden černý kámen. Dva kameny nikdy nesmějí ležet na stejném poli. Dva hráči – Bílý a Černý – se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, pohne jedním svým kamenem o libovolný počet polí doprava nebo doleva, přičemž nesmí opustit šachovnici ani přeskočit soupeřův kámen. Kdo nemůže hrát, prohrál.

Poznámka. Northcottova hra sice není konečná, ale přesto má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

Hra 35. (Bídný Nim) Hraje se stejně jako klasický Nim s jedinou změnou – hráč, který nemůže táhnout, vyhrál.

Hra 36. (Nim$_k$) Mějme pevně dané číslo k. Hra je podobná jako Nim – na stole je n hromádek sirek, dva hráči z nich střídavě odebírají. Tentokrát smí ale hráč ve svém tahu odebrat sirky až z k různých hromádek. Z každé hromádky může vzít libovolné množství, celkem však musí odebrat alespoň jednu sirku.

Spragueova–Grundyho funkce

Abychom si usnadnili vyjadřování, zavedeme pojem *následníka* dané pozice – budeme tak označovat kteroukoliv pozici, do níž se ze zkoumané pozice dá dostat jedním tahem.

Definice 37. *Spragueova–Grundyho funkce* hry je funkce g přiřazující každé pozici nejmenší celé nezáporné číslo, které není Spragueovou–Grundyho hodnotou žádného z jejích následníků. Namísto celého názvu Sprague–Grundy budeme pro zkrácení psát často jen SG.

Stejně jako v případě V a P pozic definujeme hodnoty SG funkce „od konce". Pokud už pro nějakou pozici známe hodnotu SG funkce všech jejích následníků, můžeme určit i její SG hodnotu. SG hodnota koncových pozic je z definice nulová.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim s počáteční pozicí $(1, 2)$.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim o jedné hromádce velikosti n.

Definice. O kombinatorické hře řekneme, že je *progresivně omezená*, pokud existuje takové přirozené číslo m, že každá hra skončí nejvýše po m tazích bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Odteď se budeme dále zabývat jen hrami, které jsou progresivně omezené. Nim mezi ně zjevně patří – pro počáteční pozici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ skončí každá partie nejpozději po $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ tazích, jelikož každým tahem ubude minimálně jedna sirka.

A proč nás zajímají pouze progresivně omezené hry? Protože **pro každou progresivně omezenou hru existuje SG funkce, která je navíc jednoznačně určena!** Dokázat to není těžké – hodnoty SG funkce definujeme od koncových pozic a díky progresivní omezenosti budou mít všechny pozice konečnou hodnotu.

Pokud hra není progresivně omezená, SG funkce pro ni existovat může, nicméně teorie kolem jejího zavedení je o něco složitější a my se jí věnovat nebudeme.

Definice. Hrám, ve kterých prohrává hráč nemající tah (neboli všechny koncové pozice jsou prohrávající) říkáme *normální* (anglicky *under the normal play rule*). Pokud naopak hráč nemající tah vyhrává (koncové pozice jsou vyhrávající) nazýváme hru *bídnou* (anglicky *under the misère play rule*).

Pozorování. Pro normální hru platí, že prohrávající pozice přesně odpovídají pozicím, ve kterých je SG funkce nulová.

Pro progresivně omezené normální hry se nám tedy pomocí SG funkce podařilo přiřadit každé pozici nezáporné celé číslo, přičemž kladným hodnotám odpovídají V pozice a nulovým P pozice.

Může se zdát, že jsme odvedli nezanedbatelný kus práce a přitom jsme zavedením SG funkce nezískali nic nového. Nenechte se mýlit – právě SG funkce nám umožní hry sčítat.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Hru 2. (Na stole je 15 sirek, hráči střídající se v tazích mohou odebrat 1 až 4 sirky, kdo nemůže táhnout, prohrál.)

Sčítání her

Aniž bychom poskytovali formální definici, budeme za *součet* n her považovat hru, která probíhá takto: Hráč si ve svém tahu nejprve zvolí, ve které z oněch n her udělá tah, a pak táhne podle pravidel příslušné hry. Po něm je na řadě jeho protihráč, který postupuje naprosto stejně.

Například na Nim s n hromádkami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ můžeme nahlížet jako na součet n Nimů s jednou hromádkou postupně o velikosti x_1 až x_n. Z toho je patrné, že i součet nezajímavých snadno řešitelných her může mít komplikované řešení.

Poznámka. Jsou-li všechny hry H_1 až H_n normální a progresivně omezené, je jejich součet rovněž normální a progresivně omezený.

Věta. (Sprague–Grundy) *Buď g_i SG funkce hry H_i pro $i = 1, \ldots, n$. Pak součet her $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ má SG funkci*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Nalezněte SG funkce v následujících hrách. Všechny hry jsou normální, neboli kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 38. Na stole je hromádka n sirek, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu lze z hromádky odebrat buď libovolný sudý počet sirek, ne však celou hromádku, nebo všechny sirky, pokud jich je lichý počet.

Hra 39. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze odebrat libovolný sudý počet sirek z jedné hromádky, nebo libovolnou hromádku, na které už je jen jedna sirka.

Hra 40. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze buď odebrat libovolné množství sirek z jedné hromádky, nebo jednu hromádku rozdělit na dvě neprázdné hromádky (v takovém případě hráč žádné sirky nebere).

Hra 41. (Vločka) Hra začíná s vločkou V_n o n ramenech, tj. grafem s $n+1$ vrcholy, z nichž všechny až na jeden sousedí právě s tím jediným zbývajícím. V jednom tahu hráč smaže jeden vrchol a všechny hrany s ním spojené. V každém tahu musí být smazána alespoň jedna hrana, čili nelze smazat vrchol, který již není „spojený“ s žádným jiným.

Návody

1. Pomocí zpětného rozboru snadno zjistíme, že vítězná strategie prvního hráče je tato: Hraj tak, aby protihráči zbyl na stole vždy počet sirek dělitelný třemi.

2. Vyhrávající strategii má druhý hráč – stačí mu nechávat na stole vždy počet sirek dělitelný pěti.

3. Vyhrávající strategii má druhý hráč a můžeme ji popsat slovy „udržuj věž na úhlopříčce“.

4. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých je počet sirek násobkem tří.

5. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých počet sirek dává po dělení třemi zbytek jedna.

6. Vyhrávající strategii má první hráč. Prohrávající jsou právě ty pozice, do nichž se lze z levého dolního rohu dostat konečným počtem tahů šachovou věží o dvě pole.

7. Začínající hráč bude určitě na tahu i v pozici 4. Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízu, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Podle toho se začínající hráč rozhodne, zda přičte jedničku, nebo dvojku.

8. Neprohrávající strategii má první hráč. Kdyby ji měl druhý hráč, může první hráč ve svých dvou počátečních tazích táhnout jedním z koňů „tam a zpět“, čímž by se dostal do role druhého hráče.

9. Vyhrávající strategii má první hráč. Jako vyčkávací tah totiž může umazat z tabule jedničku, která by libovolným jiným tahem tak jako tak zmizela.

10. Vyhrávající strategii má Kenny. V prvním tahu položí minci doprostřed stolu a dál vždy kopíruje Jardovy tahy pomocí středové souměrnosti.

11. Vyhrává Riikka, a to bez jakékoliv námahy – ať hrají oba hráči jakkoli, hra skončí právě po 31 tazích.

12. Vyhraje Riikka. V prvním tahu rozlomí čokoládu napůl podél jedné z os souměrnosti a podle tohoto lomu se bude celou hru osově symetricky řídit. Alternativní možností by bylo využití symetrie středové.

13. Vyhrávající strategii má Kuba. Stačí, když bude hrát středově symetricky s Aničkou. Její nejnověji položený kůň nemůže nikdy svůj souměrný obraz ohrožovat, protože jde o dvě pole různých barev.

14. Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním tahu vybarví čtverec 16×16 tak, aby tabulka byla osově symetrická, a dál hraje osově symetricky s druhým hráčem.

15. Neprohrávající strategii má Háňa – umí se totiž postarat o to, aby jí připadla právě čísla na sudých pozicích, případně aby jí připadla právě čísla na lichých pozicích. Pokud jsou tyto součty různé, má Háňa dokonce strategii vyhrávající.

16. Vyhrávající strategii má druhý hráč – Viktor. Chytře si rozdělí hrací plán na pomyslná domina tak, aby každý čtvereček 2×2 obsahoval alespoň jedno celé domino.

18. Pro $n \leq 3$ vítězí první hráč, jindy má druhý neprohrávající strategii. Ta spočívá v rafinovaném rozdělení herního plánu na kosočtverečky tak, aby každá vyhrávající řada nutně obsahovala jeden celý kosočtvereček.

32. Místo želvy ležící na n-tém místě nohama nahoru si můžeme představit hromádku o n mincích. V Želvách je na každém políčku vždy právě jedna želva – nemůžeme mít dvě želvy vzhůru nohama, které by značily dvě hromádky o velikosti 7. Naštěstí v Nimu platí, že jsou-li ve hře dvě hromádky stejné velikosti, hra se nezmění, pokud obě hromádky odstraníme.

36. Podobně jako v případě klasického Nimu se pro Nim_k dá dokázat, že pozice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je prohrávající právě tehdy, když v binárním zápise čísel x_1, x_2, … , x_n pod sebe je počet jedniček v každém sloupci dělitelný $k + 1$. Zkuste to!

Poděkování a zdroje

Příspěvek je z velké části jen zkrácenou verzí diplomové práce Teorie her pro nadané žáky středních škol Alči Skálové vzniklé na základě PraSečího seriálu[7] z 32. ročníku. Část textu jsem pozměnil, ale úlohám jsem nechal jejich opohádkování – například se tedy můžete dočíst o orzích, kteří už jsou v PraSečím důchodu.

[7] *mks.mff.cuni.cz/archive/32/12.pdf*