Kombinatorická teorie čísel

Rado van Švarc

Abstrakt. Příspěvek obsahuje úlohy z kombinatorické teorie čísel.

Úloha 1. Vybrali jsme $n+1$ čísel z množiny $1, 2, \dots, 2n$. Dokažte, že některé z nich dělí některé jiné. (Paul Erdős)

Úloha 2. Dokažte, že každé přirozené číslo je možné vyjádřit jako součet přirozených čísel tvaru 2^a3^b tak, aby žádné z nich nedělilo jiné.

Úloha 3. Alespoň dvouprvková množina M přirozených čísel je *kouzelná*, jestliže pro každá různá $a, b \in M$ platí také

$$\frac{a+b}{NSD(a,b)} \in M.$$

Najděte všechny konečné kouzelné množiny. (BAMO, 2009)

Úloha 4. Buď m přirozené číslo a označme

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid m^2 \le n < (m+1)^2\}.$$

Dokažte, že všechny součiny tvaru ab pro $a, b \in M$ jsou různé pro různé neuspořádané dvojice $\{a, b\}$. (Indie 1998)

Úloha 5. Buď A n-prvková množina zbytků modulo n^2. Dokažte, že existuje n-prvková množina B zbytků modulo n^2 taková, že součty $A + B$ pokrývají alespoň polovinu všech zbytků modulo n^2. (IMO Shortlist 1999)

Úloha 6. Buď p prvočíslo. Dokažte, že z tabulky $p^2 \times p^2$ je možné vybrat p^3 políček tak, aby žádná čtveřice vybraných políček netvořila vrcholy pravoúhelníku, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami tabulky.

(Česko-slovensko-polské střetnutí 2010)

Úloha 7. Najděte všechna přirozená čísla $k \ge 2$, pro která platí: pro libovolný pár různých přirozených čísel m, n nepřevyšujících k není číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ dělitelné k. (MEMO 2009)

Úloha 8. Je dáno prvočíslo p. Najděte všechna k taková, že množinu $\{1, 2, \dots, k\}$ lze rozdělit na p částí se stejným součtem prvků. (IMO Long List 1985)

Nebojme se nekonečna

Úloha 9. Množina všech přirozených čísel je rozdělena na konečně mnoho podmnožin. Ukažte, že některá z nich (označme ji M) má následující vlastnost: s každým $n \in M$ leží v M nekonečně mnoho dalších násobků n.
(Berkeley Math Circle Monthly Contest 1999-2000)

Úloha 10. Rozhodněte, zda existuje nekonečná rostoucí posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každé k je pouze konečně mnoho z čísel $a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \ldots$ prvočísly.

Úloha 11. Dokažte, že existuje libovolně velká množina přirozených čísel M taková, že $(a-b)^2 \mid ab$ pro libovolná různá $a, b \in M$. (USA 1998)

Úloha 12. Buďte a, b přirozená čísla větší než 2. Dokažte, že existuje konečná posloupnost $(n_i)_1^k$ taková, že $n_1 = a$, $n_k = b$, a navíc $n_i + n_{i+1} \mid n_i n_{i+1}$.
(Rumunsko 1998)

Úloha 13. Přirozené číslo n je *rozložitelné*, pokud existuje 2012 přirozených čísel a_i s následujícími vlastnostmi:

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$,
(ii) $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{2012}$,
(iii) $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, 2011$.

Dokažte, že přirozených čísel, která nejsou rozložitelná, je pouze konečně mnoho.
(iKS 2012)

Úloha 14. Dokažte, že existuje nekonečná množina přirozených čísel H taková, že pro každá dvě čísla $x, y \in H$ má číslo $x + y$ sudý počet různých prvočíselných dělitelů. (MKS 30-8-4b)

Úloha 15. Obarvíme-li všechna přirozená čísla konečně mnoha barvami, dokažte, že najdeme tři různá čísla a, b, c stejné barvy, která splňují $a + b = c$.
(Schurova věta)

Úloha 16. Nechť $a_1 < a_2 < \cdots$ je rostoucí posloupnost taková, že $a_{n+1} - a_n < 1\,000\,000$ pro všechna n. Dokažte, že pak existují indexy i, j takové, že $a_i \mid a_j$.
(Reid Barton)

Návody

1. Rozdělte množinu ze zadání na n částí tak, že kdykoli vezmeme dvě čísla z jedné části, tak jedno bude dělit druhé.

2. Je-li číslo sudé, vydělte dvěma, je-li liché, odečtěte největší možnou mocninu trojky.

3. Vezměte si jakožto a, b nejmenší čísla z M. Pak musí $(a + b)/NSD(a, b) = a$, z toho plyne $a \mid b$, a vyjádříme $b = a^2 - a$. Případ, kdy v množině je ještě třetí nejmenší číslo c dovedeme do sporu (opět $a \mid c$, vyjádříme c atd.). Jediné kouzelné množiny jsou tedy dvouprvkové $\{a, a^2 - a\}$.

4. Kdykoli $a_1b_1 = a_2b_2$, dají se tato čísla vyjádřit jako $a_1 = uv$, $b_1 = xy$, $a_2 = ux$, $b_2 = vy$. Dále pokud $u < x$ a $v < y$, tak $\lfloor\sqrt{uv}\rfloor < \lfloor\sqrt{xy}\rfloor$. Rozebráním možností uspořádání u, v, x, y dostáváme výsledek.

5. Postupně vybírejte prvky B. V každém kroku můžete pomocí Dirichletova principu pokrýt alespoň $n/2$ nových zbytků.

6. Rozsekejte na čtverce $p \times p$ a v každém vyberte jakožto p políček úhlopříčku posunutou v závislosti na součinu souřadnic příslušného čtverce.

7. Pouze 2, 3. Pro sudé $k \geq 4$ přímo najdete m, n. Pro lichá $k \geq 5$ existuje alespoň $(k+3)/2$ různých $n \leq k$, pro které n^{n-1} dává kvadratický zbytek, ale těch může být nanejvýš $(k+1)/2$.

8. Musí nutně platit $k > p$ a $p \mid \frac{k(k+1)}{2}$. A v takových situacích je skutečně možné rozdělení najít. Jakmile máte rozdělení pro k, najdete snadno rozdělení pro $k + 2p$ párováním dvojic se stejným prvkem. Takto ošetříte případ $p = 2$ a pro lichá prvočísla stačí najít rozdělení pro k rovno $2p$, $2p-1$, $3p$ a $3p-1$. Případ $2p$ je možné opět spárovat, pro $3p$ volte posloupnosti: $a_n = 3n$, $b_1 = 3p-1$, b_{n+1} je největší číslo pod b_n nedělitelné třemi a c_n analogicky jako b_n, ovšem začínající na $(3p-1)/2$. Pak funguje rozdělení na trojice

$$\{a_n, b_n, c_n\} \text{ pro } n = 1, 2, \dots, p.$$

Jelikož mají tato rozdělení pro $2p$ a $3p$ stejně početné části, je možné je použít i na $2p-1$ a $3p-1$, když si do množiny přimyslíte nulu.

9. Sporem, předpokládejte, že každá množina má zástupce, jehož pouze konečně násobků leží v příslušné množině. Spor pak hledejte v násobcích součinu všech zástupců.

10. Ano, volíme ji tak, aby a_1 bylo složené, dále a_2 i $a_2 + 1$ byla složená, aby a_3, $a_3 + 1$ i $a_3 + 2$ byla složená, ...

11. Máme-li takovou množinu, můžeme ji celou posouvat o jistou konstantu tak, že vlastnost zůstane zachována. Současně, máme-li takovou množinu, můžeme do ní „beztrestně“ přidat nulu.

12. Uvědomíme si, že vztah ze zadání říká, že sousední čísla jsou tvaru xyz, $x(x-y)z$. Nejprve umíme převést číslo a na číslo $a!$, pak z něj můžeme postupně odbourávat nejvyšší prvočísla, až dostaneme mocninu dvojky. Nakonec stačí libovolné dvě mocniny dvojky na sebe umět převést.

13. Indukcí podle počtu sčítanců, na které to rozkládáme. Chceme-li rozložit obrovské liché číslo l, použijeme indukční přepoklad na $(n-1)/2$, příslušné rozložení vynásobíme dvěma a přičteme jedničku. Stejně rozložíme i násobky obrovských lichých čísel, zbývá rozložit obrovské mocniny dvojky $1 + 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots$.

14. Podle Ramseyovy věty v grafu, jehož vrcholy jsou vhodná přirozená čísla a hrany jsou obarveny podle parity počtu různých prvočíselných dělitelů součtu, najdete nekonečnou kliku.

15. Podle Ramseyovy věty v grafu, jehož vrcholy jsou celá čísla a hrany jsou obarveny podle barvy své délky, najdete nekonečnou kliku.

16. Nazvěme posloupnost x_n k-skoro aritmetickou, pokud existuje aritmetická posloupnost a_n taková, že $0 \leq x_n - a_n \leq k$. Pokud existuje prvek a_n, který nedělí žádný prvek x_n, můžeme z posloupnosti x_n vybrat $(k-1)$-skoro aritmetickou posloupnost.

Literatura a zdroje

Základním zdrojem pro mne byla přednáška Mirka Olšáka ze soustředění v Oldřichově, kterou jsem bezostyšně zkopíroval. Ta čerpala z následujících zdrojů:

[1] Gabriel Carroll: *Combinatorial Number Theory (Teacher's Edition)*
[2] Peter Vandendriessche, Hojoo Lee: *Problems in Elementary Number Theory*