Kombinatorická geometrie

Kuba Svoboda

Abstrakt. Příspěvek pojednává o základních větách v kombinatorické geometrii a jejich různém použití v příkladech.

Kombinatorická geometrie je hezká v tom, že ačkoliv jsou v ní složité problémy, jejich formulace je obvykle jednoduchá a přirozená. Přesto je pro důkazy potřeba zavést formální definice.

Definice. *Bod* v $\mathbb{R}^n$ (n-dimenzionálním prostoru) je uspořádaná n-tice $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definice. Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud pro každou dvojici bodů $x, y \in C$ celá úsečka xy leží v C, tedy pro každé $t \in [0,1]$ bod $t \cdot x + (1-t) \cdot y$ leží v C. Pro množinu bodů $X \subset \mathbb{R}^n$ je $\operatorname{conv}(X)$ nejmenší množina bodů obsahující X taková, že je konvexní. Tuto množinu nazýváme *konvexní obal*.

Věta. (Radonovo lemma) *Nechť A je množina alespoň $d+2$ bodů v $\mathbb{R}^d$. Potom existují dvě disjunktní podmnožiny $A_1, A_2 \subset A$, takové, že*

$$\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2) \neq \emptyset.$$

Věta. (Helly) *Nechť C_1, C_2, ..., C_n jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$ a $n \geq d+1$. Pokud je průnik každé $(d+1)$-tice těchto množin neprázdný, potom je průnik všech n množin neprázdný.*

Věta. *(Minkowski) Nechť Λ je mřížka v $\mathbb{R}^d$ a nechť $C \subset \mathbb{R}^d$ je symetrická konvexní množina s $\operatorname{Vol}(C) > 2^d \det(\Lambda)$. Potom C obsahuje bod z Λ jiný než 0.*

Hellyho věta

Úloha 1. Mějme množinu bodů v rovině takovou, že každá trojice těchto bodů je obsažena v kruhu o poloměru jedna. Dokažte, že potom všechny body jsou obsaženy v kruhu o poloměru jedna.

Úloha 2. V rovině je množina obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami a každé dva se protínají. Dokažte, že potom mají všechny společný bod.

Úloha 3. Najděte množinu konvexních útvarů v rovině, kde se každé dva protínají, ale zároveň neexistuje bod, který je ve všech útvarech.

Úloha 4. Existuje nekonečná množina 2016-úhelníků (ne nutně konvexních) v rovině taková, že každá trojice má společný bod, ale žádný bod nenáleží všem?

Úloha 5. V rovině leží $n \geq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Pokud pro každé tři existuje přímka, která je protíná, dokažte, že existuje přímka, která protíná všechny úsečky.

Úloha 6. Nechť $C_1, \ldots, C_n$ je soubor alespoň tří konvexních množin v rovině a nechť K je podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K.

Úloha 7. Řekneme, že soubor $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q)-*vlastnost*, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z C lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. *Špendlíkovost* $s(C)$ souboru množin C je velikost nejmenší množiny $X \subset \mathbb{R}^2$ takové, že každé $C_i \in C$ obsahuje alespoň jeden bod z X.

(1) Dokažte, že je-li C konečný soubor osových obdélníků s $(4, 3)$-vlastností, pak $s(C) \leq 2$.
(2) Najděte soubor C několika osových obdélníků s $(3, 2)$-vlastností, pro který $s(C) = 3$.

Minkowského věta

Úloha 8. Nechť K je kruh se středem v počátku o poloměru 26 metrů. Na každém bodě s celočíselnými souřadnicemi uvnitř K (krom počátku) roste strom o poloměru 16 centimetrů. Dokažte, že pokud stojíme uprostřed, nemůžeme vidět mimo prales.

Úloha 9. Pro α iracionální a $Q \in \mathbb{N}$ dokažte, že existují $p, q \in \mathbb{Z}$, kde $q \leq Q$, takové, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

(Dirichlet)

Úloha 10. Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, taková, že

$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, i = 1, 2.$$

Úloha 11. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ existují celá čísla x_1, x_2, x_3 a x_4, taková, že

$$x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

(Lagrange)

Tak všechno

Úloha 12. Do mnohoúhelníku o obsahu pět jsme nakreslili devět útvarů velikosti jedna. Dokažte, že můžeme najít dva útvary, jejichž průnik je alespoň 1/9.
(MKS 28–4–2)

Úloha 13. Na přímce je 50 úseček. Dokažte, že existuje bod, který je společný osmi úsečkám, nebo existuje osm úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

Úloha 14. Dokažte, že každý mnohoúhelník obsahuje alespoň jednu svoji diagonálu.

Úloha 15. Vnitřní prostory muzea tvoří (nekonvexní) mnohoúhelník s n vrcholy. Dokažte, že stačí do muzea umístit nanejvýš $n/3$ hlídačů tak, aby ohlídali celý prostor. Dokažte, že méně jich pro některá muzea být nemůže.

Úloha 16. Uvnitř $2n$-úhelníku se nachází liška. Ze všech vrcholů najednou po této lišce vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá hrana musela být zasažena alespoň dvakrát. (MKS 28–4–6)

Úloha 17. Máme šest bodů v obdélníku 4×3. Dokažte, že existují takové dva body, které mají mezi sebou vzdálenost alespoň $\sqrt{5}$.

Úloha 18. Najděte dvě konvexní množiny bodů v rovině takové, že po jejich odebrání se rovina rozpadne na pět nesouvislých částí.

Úloha 19. Dokažte, že pro šest bodů v obecné poloze platí, že v nich existuje trojice bodů tvořící trojúhelník s jedním úhlem velikosti alespoň $120°$.

Úloha 20. Rozhodněte, zda je možné do roviny umístit 13 bodů tak, aby žádné tři neležely na přímce a aby každý úhel tvořený trojicí těchto bodů byl nejvýše $150°$.
(MKS 22–2–7)

Úloha 21. V rovině leží deset bodů s následující vlastností: mezi každými pěti z nich lze najít čtyři, které tvoří tětivový čtyřúhelník. Kolik nejméně z těchto bodů musí ležet na jedné kružnici?

Úloha 22. V rovině máme 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že mezi všemi trojúhelníky tvořenými těmito body není více než 70% ostroúhlých.
(IMO 1970, 6)

Úloha 23. Množina bodů P *propichuje trojúhelníky* množiny bodů M, pokud každý trojúhelník určený trojicí bodů z M obsahuje ve svém vnitřku aspoň jeden bod z P. Dokažte, že pro každou n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze lze najít množinu P s $2n - 5$ body propichující trojúhelníky M.

Zdroje

[1] Předmět Kombinatorická a výpočetní geometrie I, skripta: *http://kam.mff.cuni.cz/kvgII.html*