Kombinatorická geometrie

Martin Tancer

Na přednášce budeme řešit úlohy z kombinatorické geometrie. Nebude se jednat o přednášku, která by vykládala nějakou ucelenou teorii, spíš si ukážeme si nějaké užitečné postupy, jak úlohy z kombinatorické geometrie řešit.

Pomocné věty

Věta. (Hellyho věta – verze pro rovinu) *V rovině jsou dány konvexní množiny K_1, K_2, ... , K_n pro $n \geq 3$. Navíc platí, že každé tři z těchto množin mají neprázdný průnik. Potom už nutně všechny mají neprázdný průnik.*

Věta. (Hellyho věta – obecná verze) *V $\mathbb{R}^d$ jsou dány konvexní množiny K_1, K_2, ... , K_n pro $n \geq d+1$. Navíc platí, že každých $d+1$ z těchto množin má neprázdný průnik. Potom už nutně všechny mají neprázdný průnik.*

Příklady

Příklad 1. Uvnitř rovnostranného trojúhelníku o straně 1 je dáno deset různých bodů. Dokažte, že mezi těmito body existují dva různé body takové, že jejich vzdálenost je nejvýše $\frac{1}{3}$.

Příklad 2. Vnitřní prostory muzea tvoří (ne nutně konvexní) mnohoúhelník s n vrcholy. Dokažte, že lze do muzea umístit nejvýše $\frac{n}{3}$ hlídačů tak, že ohlídají celé muzeum.

Příklad 3. Určete, kolik nejvýše bodů lze umístit v rovině tak, aby žádné tři neležely na společné přímce a aby každý úhel tvořený trojicí těchto bodů byl nejvýše $119°$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je možné v rovině umístit 13 bodů tak, aby žádné tři neležely na společné přímce a aby každý úhel tvořený trojicí těchto bodů byl nejvýše $150°$.

Příklad 5. V rovině je dáno 100 bodů, žádné tři neleží na přímce. Uvažujme všechny trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou některé tři z daných bodů. Dokažte, že nejvýše 70% uvažovaných trojúhelníků je ostroúhlých.

Příklad 6. Je dána konečná množina bodů v rovině taková, že každé 3 body určují tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že lze k této množině přidat bod, aby tato vlastnost zůstala zachována. Platí analogické tvrzení i pro nekonečné množiny?

Příklad 7. Na přímce je dáno 50 úseček, dokažte, že platí alespoň jedno z následujících tvrzení:

(i) Existuje 8 úseček se společným bodem.
(ii) Existuje 8 úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní.

Příklad 8. V rovině je dáno $n \geq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Pro každé tři existuje přímka, která je protíná. Dokažte, že existuje přímka protínající všechny tyto úsečky.

Příklad 9. Konečná množina M bodů v rovině má takovou vlastnost, že libovolné tři body z ní lze pokrýt kruhem o poloměru 1. Dokažte, že celou množinu M lze pokrýt kruhem o průměru 1.

Příklad 10. Je dáno n bodu v rovině, každé dva body mají vzdálenost nejvýše 1. Určete maximální možný počet úseček tvořených těmito body, které mají délku přesně 1.

Příklad 11. V prostoru je dána kartézská soustava souřadnic. Každý bod s celočíselnými souřadnicemi nazveme mřížovým. Obarvěme 2000 mřížových bodů modře a jiných 2000 mřížových bodů červeně tak, aby žádné dvě modročervené úsečky neměly společný vnitřní bod (modročervená úsečka je taková úsečka, že má jeden krajní bod modrý a druhý červený). Uvažujme nejmenší kvádr s hranami rovnoběžnými s osami souřadnic, který obsahuje všechny obarvené body.

(i) Dokažte, že kvádr obsahuje alespoň 500 000 mřížových bodů.
(ii) Udejte příklad popsaného zobrazení, kdy uvažovaný kvádr obsahuje nejvýše 8 000 000 bodů.

Příklad 12. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, označme c délku přepony ABC. V tomto trojúhelníku je dána konečná množina S. Dokažte, že je možné body množiny S uspořádat do posloupnosti $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tak, že

$$|X_1X_2|^2 + |X_2X_3|^2 + \cdots + |X_{n-1}X_n|^2 \leq c^2.$$

Příklad 13. V rovině je daných deset různých bodů s následující vlastností: mezi každými pěti z nich lze vybrat čtyři takové, které tvoří tětivový čtyřúhelník. Kolik nejméně z těchto bodů musí ležet na jedné kružnici?

Příklad 14. Nechť $n \geq 4$ a nechť M je konečná množina n bodů v prostoru. Předpokládejme, že tyto body jsou obarveny černě či bíle tak, že každá sféra[25], která protíná M v alespoň čtyřech bodech obsahuje stejný počet černých a bílých bodů. Dokažte, že všechny body z M leží na společné sféře.

[25] Sféra je povrch koule.