Kombinatorická geometrie

Miroslav Olšák

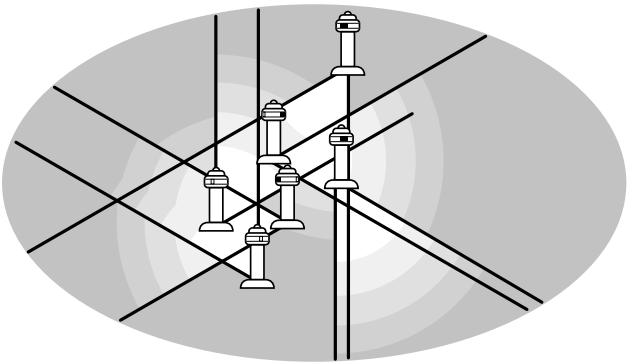
Abstrakt. Postupy v řešení geometrických a kombinatorických úloh se značně liší. Přesto u některých úloh není jasné, z kterého směru je uchopit, což může vést k mylnému pocitu, že nejdou uchopit vůbec. Někdy je možné převést úlohu na čistě geometrickou či čistě kombinatorickou (například grafovou). Jindy se třeba dá nalézt chytrá geometrická neměnka.

Příklad 1. Uvnitř $2n$-úhelníku se nachází liška. Ze všech vrcholů najednou po této lišce vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá hrana musela být zasažena dvakrát.

Příklad 2. Rozřezali jsme obdélník na menší obdélníky a shledáváme, že každý má alespoň jednu stranu celočíselnou. Dokažte, že i původní obdélník měl jednu stranu celočíselnou.

Příklad 3. Je dán bod A a několik mnohoúhelníků v rovině takových, že každé dva mají neprázdný průnik. Dokažte, že existuje kružnice se středem v A, která protíná všechny tyto mnohoúhelníky nebo se jich alespoň dotýká. (PraSe 2008/2009)

Příklad 4. V zátoce je postaveno 18 majáků, každý dokáže osvítit úhel 20°. Dokažte, že umíme natočit majáky tak, aby byla světly majáků pokryta celá zátoka.



Klíčová slova. Kombinatorická geometrie

Příklad 5. Kruhový terč o poloměru 12cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost dvou zásahů je menší než 7cm. (MO 2009/2010)

Příklad 6. V rovině je dáno několik bodů tak, že neleží všechny na jedné přímce. Dokažte, že je možné najít přímku, na které leží právě dva tyto body.

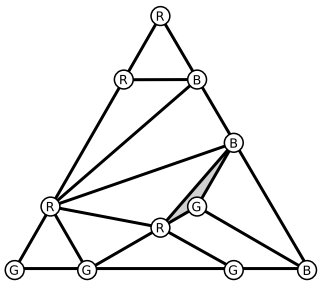
Příklad 7. V rovině jsou dány body P, A_1, A_2, ... , A_{2010} v obecné poloze. Dokažte, že počet všech trojúhelníků $A_iA_jA_k$, uvnitř kterých leží bod P, je sudý.

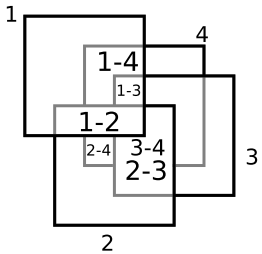
Příklad 8. Máme v rovině 100 bodů v obecné poloze. Dokažte, že mezi všemi trojúhelníky tvořenými těmito body není více než 70% ostroúhlých. (IMO 1970)

Příklad 9. Je dán mnohoúhelník o obsahu n. Dokažte, že je možné jej vložit do roviny tak, aby pokrýval (hranice se počítá) alespoň $n + 1$ mřížových bodů.

Příklad 10. Máme daných 60 bodů v jednotkovém kruhu. Dokažte, že je možné zvolit na okraji tohoto kruhu bod (nemusí být jedním ze zadaných), jehož součet vzdáleností od zadaných bodů nepřevyšuje 80. (ČPS 2009/2010)

Příklad 11. Kolik nejvýše je možné umístit čtverců 1×1 do prostoru tak, aby měly navzájem rovnoběžné strany a každé dva se viděly? Říkáme, že dva čtverce se vidí, pokud existuje úsečka spojující tyto dva čtverce, která je kolmá na jejich roviny a přitom vede mimo všechny ostatní čtverce. A co kdyby to byly kruhy?





Příklad 12. Nakreslíme do roviny trojúhelník RGB. Rozdělíme jej na několik menších trojúhelníčků tak, aby žádný trojúhelníček neměl vrchol uvnitř strany jiného trojúhelníčku. Nyní obarvíme vrcholy trojúhelníčků červeně, zeleně a modře tak, aby vrcholy velkého trojúhelníku dostaly příslušné barvy. Dále vrcholy na stranách musí dostat barvu jednoho z přilehlých vrcholů velkého trojúhelníka. Dokažte, že má pak jeden z malých trojúhelníčků všechny vrcholy různě barevné.

(Spernerovo lemma)

Příklad 13. Půdorys galerie má tvar n-úhelníku. Kolik strážníků v závislosti na n (opravdu to závisí ;)) potřebujeme, abychom je mohli rozestavit tak, aby dohromady viděli na (hlídali) celou galerii? Strážník na rozdíl od majáku vidí všemi směry.

(Art gallery problem)

Příklad 14. Dokažte, že z lichého počtu trojúhelníku stejného obsahu neposkládáme čtverec. (Monskyho věta)