Kombinatorická geometrie

Libor Barto — 22. listopadu 2000

Pár užitečných rad

1) Vždy je dobré si situaci nakreslit, zkoušet vyřešit méně obecně (např. pro nějaký konkrétní počet bodů). Někdy je naopak jednodušší řešit úlohu obecnější.

2) Máme-li např. body v rovině, můžeme uvažovat body s největší (nejmenší) vzdáleností, trojúhelník jimi určený s největším (nejmenším) obsahem, apod.

3) Často je užitečné hledat transformace, při níž se určitá vlastnost množiny bodů (úseček, přímek, ...) nezmění (zvětší, zmenší, ...) Slovem transformace je míněno např. zobrazení jednoho bodu ve středové souměrnosti podle jiného bodu, posunutí některých bodů, kruhová inverze, ... Obzvláště používané je zobrazení všech bodů na přímku.

4) Dirichletův princip: Máme-li n zásuvek a v nich více než $(k-1)n$ předmětů, tak v alespoň jedné zásuvce je alespoň k předmětů. Toto je jeden z nejpoužívanějších obratů při řešení tohoto typu úloh.

5) Hellyova věta: Je-li na přímce (resp. v rovině, resp. v prostoru) dán konečný počet konvexních množin, jichž je alespoň 2 (3, 4) a z nichž každé 2 (3, 4) mají společný bod, pak všechny tyto množiny mají společný bod.

6) Někdy pomůže rozdělení mnohoúhelníku P na trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech P (toto rozdělení vždy existuje), nebo rozdělení konvexního obalu konečné množiny bodů na trojúhelníky s vrcholy v daných bodech, apod.

7) Indukci lze provádět nejen podle počtu bodů, ale též podle nejrozmanitějších jiných charakteristik, např. podle počtu bodů na hranici konvexního obalu, ... Při indukci se leckdy vyplatí požadovat splnění silnějšího předpokladu, než požaduje úloha, kterou řešíme.

Příklady

1. příklad Vnitřní prostory muzea tvoří mnohoúhelník (ne nutně konvexní) o $3n$ vrcholech. Lze v muzeu rozestavit n hlídačů, aby dohromady viděli celý prostor muzea?

2. příklad Je dán trojúhelník, který má obsah 1, a v něm 5 bodů. Dokažte, že z daných pěti bodů lze vybrat 3 (různé) takové, že jimi určený trojúhelník má obsah nejvýše $\frac{1}{4}$.

3. příklad V rovině máme dán bod A_0 a vektory $a_1, \ldots, a_n$, jejichž součet je nulový vektor. Každé pořadí $(i_1, \ldots, i_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ určuje body $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = A_0$, pro které platí

$$a_{i_1} = A_0A_1, \quad \ldots, \quad a_{i_n} = A_{n-1}A_n.$$

Dokažte, že existuje takové pořadí, že body $A_0, \ldots, A_n$ leží uvnitř nebo na ramenech úhlu o velikosti 60 stupňů s vrcholem A_0.

4. příklad Je dáno n jednotkových vektorů, jejichž součtem je nulový vektor. Dokažte, že je lze uspořádat tak, aby pro libovolné $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ byl součet prvních k vektorů vektor velikosti nejvýše 3.

5. příklad V rovině je dáno n různých bodů. Vezmeme středy všech úseček s krajními body v daných bodech. Jaký je nejmenší možný počet těchto středů?

6. příklad Množina S je tvořena n body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že existuje množina P tvořena $2n - 5$ body taková, že uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy patří do S, leží alespoň jeden bod množiny P.

7. příklad Dokažte, že existuje konvexní 1990-úhelník s následujícími vlastnostmi
(a) Všechny jeho úhly jsou shodné
(b) Jeho strany mají v nějakém pořadí délky $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$

8. příklad Dokažte, že rovnostranný (ne nutně pravidelný) konvexní pětiúhelník obsahuje rovnostranný trojúhelník se stranou téže délky jako strana daného pětiúhelníku.

9. příklad Máme dána čísla $r_{i,j}$ (pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Chceme sestrojit body $M_1, \ldots, M_n$ v rovině tak, aby vzdálenost bodů M_i a M_j byla $r_{i,j}$ (pro všechny dvojice $i, j \in \{1, \ldots n\}$). Lze tyto body sestrojit, jestliže víme, že libovolná pětice sestrojit lze? Lze je sestrojit, víme-li pouze, že jdou sestrojit čtveřice? Řešte podobnou úlohu též na přímce a v prostoru.

10. příklad V rovině jsou dány body $O, A_1, \ldots, A_4$ takové, že trojúhelníky OA_iA_j mají obsah alespoň 1 (pro všechny dvojice různých čísel $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$). Dokažte, že pak pro některé dva body A_i, A_j má trojúhelník OA_iA_j obsah alespoň $\sqrt{2}$.

11. příklad V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů, které neleží v 1 přímce. Potom lze najít kružnici, která obsahuje alespoň 3 z daných bodů, přičemž žádný jiný neleží uvnitř této kružnice. Dokažte.

12. příklad V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů. Každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. Průměrem nazveme každou úsečkou délky d. Dokažte, že počet průměrů je nejvýše n.

13. příklad Je dán konvexní n-úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky $a_1, \ldots, a_n$ a platí:
(a) Všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné
(b) Pro délky stran platí $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

Pak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

14. příklad V rovině je dán konvexní pětiúhelník P_1 s vrcholy $A_1, \ldots, A_5$. $P_i, i \in \{1, \ldots 5\}$ je pětiúhelník vzniklý z P_1 posunutím A_1A_i. Potom existují $i, j \in \{1, \ldots, 5\}, i \neq j$ taková, že P_i a P_j mají společný vnitřní bod.

15. příklad Na stole leží patnáct časopisů, které jej celý pokrývají. Dokažte, že lze ubrat 7 z nich, aby zbývajících 8 zakrývalo alespoň $\frac{8}{15}$ velikosti stolu.

16. příklad V rovině je dáno 100 bodů, žádné tři z nich neleží v přímce. Uvažujme všechny trojúhelníky, jejichž všechny 3 vrcholy jsou některé z daných bodů. Dokažte, že nejvýše 70% uvažovaných trojúhelníků jsou ostroúhlé.

17. příklad Trojúhelník, jehož vrcholy mají čísla 1,2,3, je rozdělen na konečný počet menších trojúhelníků, z nichž každé dva mohou mít společný pouze vrchol nebo celou stranu. Každý z vrcholů menších trojúhelníků je označen jedním z čísel 1,2,3 a to tak, že se na žádné straně základního trojúhelníku neobjevuje číslo jeho protějšího vrcholu, jinak je označení libovolné. Dokažte, že vrcholy alespoň 1 z menších trojúhelníků jsou označeny třemi různými čísly 1,2,3.

18. příklad V rovině leží $n \geq 3$ úseček tak, že každé tři mají společný bod. Dokažte, že lze najít bod společný všem těmto úsečkám.

19. příklad V rovině je dáno $n \geq 3$ navzájem rovnoběžných úseček. Přitom pro každé 3 z nich existuje přímka, která je všechny protíná. Dokažte, že některá přímka protíná všech n daných úseček.

20. příklad V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů, každé tři leží v kruhu o poloměru r. Potom všechny tyto body leží v kruhu o poloměru r.

21. příklad Je možné rozložit rovnostranný trojúhelník na milion konvexních mnohoúhelníků tak, aby jich libovolná přímka protínala nejvýše 40?

22. příklad Máme dána přirozená čísla $n, k (n \geq k)$. S je množina n bodů roviny s těmito vlastnostmi:
(a) Žádné tři body množiny S neleží na přímce
(b) Ke každému bodu $P \in S$ existuje v S alespoň k navzájem různých bodů stejně vzdálených od bodu P.

Potom $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

23. příklad Na přímce je dáno 50 úseček. Dokažte, že platí alespoň jedno z následujících tvrzení:
(a) Existuje 8 úseček se společným bodem
(b) Existuje 8 úseček, z nichž každé dvě jsou disjunktní

24. příklad Je dáno několik čtverců, jejichž celkový obsah je 1. Dokažte, že je možno je umístit do čtverce s obsahem 2 aniž by se překrývaly.

25. příklad Je dán konvexní n-úhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné, a uvnitř něj bod. Dokažte, že existuje nejvýše n přímek procházejících daným bodem a dělících daný mnohoúhelník na dvě části stejného obsahu.

26. příklad Je dána konečná množina bodů v rovině, v níž každé tři body určují tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že lze přidat bod, aby tato vlastnost byla zachována. Platí toto i pro nekonečnou množinu bodů?

27. příklad Je dáno n bodů v rovině. Každá přímka, která neprochází žádným bodem, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat? (Rozklady porovnáváme jako neuspořádané dvojice množin)

28. příklad V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Kolik nejvýše úseček lze vytvořit spojováním daných bodů, aby přitom nevznikl žádný trojúhelník s vrcholy v daných bodech?

29. příklad Nechť $u_1, \ldots, u_n$ je n vektorů v rovině takových, že součet jejich délek je alespoň 1. Pak mezi nimi najdeme vektory, jejichž součet bude vektor délky alespoň $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (resp. $\frac{1}{4}$, resp. $\frac{1}{\pi}$). Dokažte.

30. příklad Uvnitř rovnostranného trojúhelníka o straně 1 máme 10 bodů. Dokažte, že existují 2 (různé) body, jejichž vzdálenost je menší než $\frac{1}{3}$.

31. příklad V rovině máme dáno 100 vektorů $v_1, \ldots, v_{100}$, jejichž délka je menší než 1. Dokažte, že existují čísla $a_1, \ldots, a_{100} \in \{-1, 1\}$ taková, že $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ má velikost nejvýše 3.

32. příklad Uvnitř jednotkového čtverce je rozmístěno několik kružnic, které mají součet obvodů 10. Dokažte, že pak existuje přímka, která protíná alespoň čtyři z těchto kružnic.

33. příklad Dokažte, že n bodů v rovině můžeme vždy pokrýt několika disjunktními kruhy, které budou mít součet průměrů menší než n, přičemž vzájemná vzdálenost každých dvou kruhů bude větší než 1. (Vzdáleností dvou kruhů rozumíme vzdálenost jejich nejbližších bodů.)

34. příklad Je dán čtverec a devět přímek. Nechť každá z devíti přímek dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, jejichž obsahy jsou v poměru 2:3. Dokažte, že alespoň tři z těchto devíti přímek procházejí jedním bodem.