Kombinatorická geometrie II.

Pavel Podbrdský

Úvod

Tato přednáška volně navazuje na moji přednášku na soustředení v Chrasticích. Nebudou však na ní potřeba žádné znalosti z předchozího dílu, takže všichni noví zájemci jsou vítáni. Budeme se zabývat kombinatorickými vlastnostmi geometrických objektů, např počtem stěn konvexního mnohostěnu daného počtu vrcholů, počtem buněk v arrangementu n nadrovin apod. V celé přednášce se budeme pohybovat v rámci d-rozměrných (eukleidovských) prostorů; pro názornou představu však vystačíme s rovinou, či (tří-rozměrným) prostorem.

Základní definice a pojmy

Definice. (Eukleidovský prostor) *Eukleidovským prostorem dimenze d ($d \in \mathbb{N}_0$) budeme rozumět množinu $\mathbb{R}^d$ všech uspořádaných d-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ reálných čísel (v případě $d = 0$ tím rozumíme jednoprvkovou množinu). Prvky eukleidovského prostoru budeme nazývat body. Na této množině máme dáno sčítání, násobení reálným číslem (obojí po složkách). Umíme tu také měřit vzdálenosti a úhly. (Vše si můžeme názorně představit na případu $d \leq 3$.)*

Definice. (Afinní podprostory) *Nechť je dán d-rozměrný eukleidovský prostor. Jeho lineárním podprostorem rozumíme libovolnou množinu, která obsahuje počátek (tj. bod $(0, 0, \ldots, 0)$) a je uzavřená na sčítání a násobení reálným číslem. Dimenzí lineárního podprostoru rozumíme jeho dimenzi ve smyslu vektorového prostoru (stačí, když to budeme chápat intuitivně). Afinním podprostorem rozumíme množinu tvaru $a + L$, kde $a \in \mathbb{R}^d$ a L je lineární podprostor $\mathbb{R}^d$. Jeho dimenzí rozumíme dimenzi příslušného podprostoru L.*

Každý bod v $\mathbb{R}^d$ lze zároveň chápat jako 0-dimenzionální afinní podprostor. Jednodimenzionální podprostory nazýváme přímky, dvojdimenzionální roviny. Nadrovinou rozumíme $d-1$-dimenzionální podprostor.

Definice. (Konvexní kombinace) *Mějme body $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Jejich konvexní kombinací rozumíme každý bod x tvaru $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (např. konvexní kombinací dvou různých bodů lze dostat přesně body úsečky spojující tyto body).*

Definice. (Konvexní množina) *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní, pokud s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje i celou úsečku spojující x a y. Jinými slovy, jsou-li $x, y \in M$ a $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, tak i $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$.*

Definice. (Konvexní obal) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$. Konvexním obalem množiny M rozumíme nejmenší konvexní množinu, která obsahuje M. Je to tedy průnik všech konvexních nadmnožin M. Lze ji také charakterizovat, jako množinu všech konvexních kombinací bodů z množiny M. Značíme symbolem* $\mathrm{conv}(M)$.

Definice. (Konvexní mnohostěn) *Konvexním mnohostěnem v $\mathbb{R}^d$ rozumíme konvexní obal konečně mnoha (alespoň $d+1$) bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Konvexní mnohostěn lze také charakterizovat, jako průnik konečně mnoha nadrovin. Fasetou konvexního mnohostěnu K rozumíme libovolnou neprázdnou množinu M tvaru $K \cap h$, kde h je nadrovina taková, že jeden z poloprostorů určený nadrovinou h obsahuje celou množinu K. Dimenzí fasety F rozumíme nejmenší dimenzi afinního podprostoru, který F obsahuje. Jednobodové fasety (neboli fasety nulové dimenze) nazýváme vrcholy K, fasety dimenze 1 nazýváme hrany a fasety dimenze $d-1$ nazýváme stěny.*

Arrangement nadrovin

Definice. (Arrangement nadrovin) *Uvažujme množinu M obsahující n nadrovin v $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že nadroviny množiny M jsou v obecné poloze, pokud pro průnik libovolných k nadrovin z množiny M je afinní podprostor dimenze $n-k$ ($k = 1, 2, \ldots, d$) a průnik libovolných $d+1$ nadrovin z množiny M je prázdný. Buňkou arrangementu nadrovin z množiny M rozumíme libovolnou oblast v $\mathbb{R}^d$ ohraničenou nadrovinami z množiny M (je to tedy konvexní mnohostěn, který lze zapsat, jako průnik příslušných poloprostorů). Stěnou arrangementu rozumíme stěnu libovolné buňky.*

Věta. *Počet buněk arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je nejvýše*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d}.$$

Pokud jsou nadroviny v obecné poloze, nastane rovnost.

Definice. (Zóna) *Buď M množina n nadrovin v $\mathbb{R}^d$, buď $h \in M$. Zónou nadroviny h v arrangementu nadrovin množiny M rozumíme množinu všech buněk, které sousedí s h (tj. jejich hranice obsahuje stěnu ležící v h).*

Věta. (O zóně) *Buď M množina n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ a $h \in M$. Existuje konstanta $c > 0$ závislá pouze na dimenzi d taková, že počet stěn v arrangementu nadrovin množiny M v $\mathbb{R}^d$, které jsou na hranici zóny h (tj. stěn, které „vidí“ nadrovinu h), je nejvýše cn^{d-1}.*

Konvexní mnohostěny

V následující kapitolce budeme potřebovat několik pojmů z teorie grafů. Ve sborníčku uvádím pouze definice těch nejdůležitějších, další najdete v příspěvku Jirky Finka.

Definice. (Graf) *Grafem budeme rozumět libovolnou uspořádanou dvojici množin $G = (V, E)$, kde E obsahuje některé dvojice prvků z V. Prvky množiny V nazýváme vrcholy grafu G, prvky množiny E nazýváme hrany grafu G. Graf často znázorňujeme obrázkem v rovině; vrcholy kreslíme jako puntíky, dva puntíky spojíme čárou, pokud dvojice příslušných vrcholů tvoří hranu grafu G. Graf G nazveme rovinný, pokud existuje jeho nakreslení, ve kterém se žádné dvě hrany neprotínají.*

Definice. (Graf konvexního mnohostěnu) *Grafem konvexního mnohostěnu K rozumíme graf tvořený vrcholy a hranami K.*

Věta. *Graf konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^2$ je kružnice. Počet hran konvexního mnohostěnu o n vrcholech v $\mathbb{R}^2$ je n. Graf konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^3$ je rovinný. Počet hran konvexního mnohostěnu o n vrcholech v $\mathbb{R}^3$ je nejvýše $3n - 6$, počet jeho stěn je nejvýše $2n - 4$.*

Věta. (Steinitz) *Graf každého konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^3$ je 3-souvislý, tj. každá dvojice vrcholů je spojena trojicí vrcholově disjunktních cest.*

Definice. (Momentová křivka) *Momentovou křivkou v $\mathbb{R}^d$ rozumíme množinu bodů $\{(t, t^2, t^3, \ldots, t^d), t \in \mathbb{R}\}$.*

Pozorování. Každá nadrovina protína momentovou křivku v nejvýše d bodech.

Definice. (Cyklický mnohostěn) *Cyklickým mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož vrcholy leží na momentové křivce.*

Věta. *Pro $d \geq 4$ jsou každé dva vrcholy cyklického mnohostěnu spojeny hranou.*

Věta. *Počet stěn cyklického mnohostěnu v $\mathbb{R}^d$ s n vrcholy ($n \geq d + 1$) je*

$$\binom{n - \lfloor d/2 \rfloor}{\lfloor d/2 \rfloor} + \binom{n - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor - 1} \quad \text{pro } d \text{ sudé}$$

a

$$2\binom{n - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor} \quad \text{pro } d \text{ liché.}$$

Voroného diagram a Delaunayova triangulace

Definice. (Voroného diagram) *Buď P konečná množina bodů v $\mathbb{R}^d$. Buď $X \in P$. Regionem bodu X rozumíme množinu bodů*

$$reg_P(X) = \{Y \in \mathbb{R}^d, |XY| = \min\{|ZY|, Z \in P\}\},$$

tj. množinu bodů, které nejsou více vzdáleny od X, než od jiných bodů množiny P. Voroného diagramem množiny P rozumíme množinu všech regionů bodů $X \in P$.

Poznámka. Každý region Voroného diagramu je konvexní mnohostěn. Voroného diagram n bodové množiny tedy rozdělí rovinu na n konvexních mnohostěnů. Můžeme tedy mluvit o vrcholech, hranách, stěnách a buňkách Voroného diagramu, budeme tím rozumět vrcholy, hrany a stěny všech regionů, případně regiony samotné.

Věta. *Voroného diagram n bodové množiny v $\mathbb{R}^2$ má nejvýše cn vrcholů a hran pro nějaké $c > 0$.*

Definice. (Delaunayova triangulace) *Buď P konečná množina bodů takových, že žádné tři body P neleží na společné přímce a žádné čtyři body P neleží na společné kružnici. Delaunayovou triangulací množiny P budeme rozumět graf, jehož vrcholy jsou body množiny P a jehož hrany dostaneme tak, že spojíme úsečkou právě ty dvojice bodů $X, Y \in P$, pro které existuje kružnice k taková, že $X, Y \in k$ a žádný bod $Z \in P$ neleží uvnitř k.*

Věta. *Delaunayova triangulace (resp. její nakreslení popsané v předchozí definici) množiny P je rovinný graf, všechny jeho stěny kromě vnější jsou trojúhelníky a vnější stěna je ohraničena hranicí konvexního obalu P.*

Příklady

(1) Kolik buněk obsahuje arrangement nadrovin v $\mathbb{R}^d$ daných rovnicemi $x_i = x_j$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $1 \leq i < j \leq d$?
(2) Kolik buněk obsahuje arrangement nadrovin v $\mathbb{R}^d$ daných rovnicemi $x_i - x_j = 0$, $x_i - x_j = 1$, $x_i - x_j = -1$, $1 \leq i < j \leq d$?
(3) Ukažte, že existuje konstanta c (závislá pouze na d) taková, že počet neomezených buněk arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je nejvýše cn^{d-1}.
(4) Ukažte, že Voroného diagram n-bodové množiny v $\mathbb{R}^3$ může mít až cn^2 vrcholů (pro nějaké pevné $c > 0$).
(5) Nechť P je konečná množina bodů v rovině taková, že žádné tři body P neleží na přímce a žádné čtyři body P neleží na kružnici. Najděte souvislost mezi Delaunayovou triangulací a Voroného diagramem množiny P.