Kolik existuje prvočísel?

MARTIN ČECH

ABSTRAKT. Příspěvek obsahuje několik zajímavých a těžších výsledků o prvočíslech včetně stručných návodů k důkazům. Mimo jiné obsahuje například netradiční důkaz toho, že prvočísel existuje nekonečně mnoho, nebo divergenci řady převrácených hodnot prvočísel.

V tomto příspěvku můžete najít několik těžších vět zabývajících se vlastnostmi prvočísel, které si včetně důkazů ukážeme na přednášce.

Kolik máme prvočísel?

Spousta čtenářů jistě tuší, že prvočísel je opravdu hodně, dokonce nekonečno. Někteří dokonce znají i tradiční Eukleidův důkaz – kdyby jich bylo konečně, všechny vynásobíme, k výsledku přičteme jedničku a dojdeme ke sporu. Ukážeme si méně tradiční, ale neméně krásný důkaz, který objevil maďarský matematik Paul Erdős. Celý důkaz uvidíte na přednášce, zde je pouze ve stručném znění:

Důkaz. (Pouze stručný) Označme $\pi(N)$ počet prvočísel menších nebo rovných N. Každé přirozené číslo n se dá vyjádřit (dokonce jednoznačně) jako součin r^2s, kde s je bezčtvercové. Je-li $n \leq N$, může r nabývat nejvýše $\sqrt{N}$ hodnot a s nejvýše $2^{\pi(N)}$ hodnot, přitom celkový počet možností musí být alespoň N, aby každé číslo mohlo mít svou reprezentaci. Z toho dostáváme nerovnost $\sqrt{N} \cdot 2^{\pi(N)} \geq N$, po zlogaritmování a úpravách máme $\pi(N) \geq \frac{1}{2}\log_2 N$.

Trochu víc než nekonečno…

Sama skutečnost, že prvočísel máme nekonečně mnoho, nám nic neříká o tom, jak hustě jsou rozmístěna. Mocnin dvojky máme také nekonečno, přesto se „v blízkosti nekonečna“ objevují velmi zřídka. Následující věta nám říká něco trochu víc než pouze to, že jich je nekonečno.

Věta. *Řada převrácených hodnot prvočísel diverguje, neboli*

$$\sum_{p \text{ prvočíslo}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Pokud máš problém s nekonečným součtem či s nekonečnem v této větě, nezoufej! Věta pouze říká, že když sčítáme převrácené hodnoty dalších a dalších prvočísel, výsledek časem přeroste libovolně obrovské číslo. Všimni si, že toto například pro zmiňované mocniny dvojky neplatí, je tedy vidět, že tento výsledek je ještě silnější než pouze to, že je prvočísel nekonečno.

Důkaz této věty si předvedeme na přednášce.

Ještě přesnější odhad

Jeden z největších matematiků Friedrich Gauss vyslovil domněnku, že funkce $\pi(x)$, která udává počet prvočísel menších nebo rovných x, roste přibližně jako $\frac{x}{\log x}$. Tento výsledek je nyní známý jako prvočíselná věta, na její důkaz se však čekalo mnoho let, než jej objevili nezávisle na sobě matematici Jacques Hadamard a Charles-Jean de la Vallée-Poussin. Jejich důkazy využívaly složitých metod komplexní analýzy a sahají daleko za rámec této přednášky, dokážeme si však pár lemmátek a s jejich pomocí méně přesné odhady, se kterými přišel ruský matematik P. L. Čebyšev.

Lemma 1. *Pro přirozené číslo n platí nerovnosti*

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Lemma 2. *Pro všechna přirozená čísla n platí*

$$\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ prvočíslo}}} p \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Kombinací těchto odhadů můžeme dokázat kýženou větu:

Věta. *Existují konstanty $0 < c_1 < c_2$ takové, že pro všechna $x \geq 2$ platí*

$$c_1 \cdot \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq c_2 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Důkaz této věty si necháme na přednášku.

Poděkování

Děkuji docentu Martinu Klazarovi, z jehož přednášky Úvod do teorie čísel jsem čerpal. Poznámky k této přednášce je možné najít v uvedené literatuře.

Zdroje a literatura

[1] *http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ln_utc.pdf*

[2] Křížek, M., Somer, L. a Šolcová, A.; *Kouzlo čísel*