Kategorie

Pepa Svoboda

Abstrakt. Přednáška je úvodem do teorie kategorií – abstraktní matematické teorie, která hraje klíčovou roli v moderní matematice.

Od množin ke kategorii

Základními matematickými objekty našeho světa jsou množiny. Samy o sobě však jsou poněkud chudé – zajímavé začnou být, až když se začneme zabývat zobrazeními mezi nimi. Bez zobrazení například nedokážeme měřit velikosti množin.

Tvrzení. (vlastnosti zobrazení) *Zobrazení mezi množinami můžeme skládat a toto skládání je asociativní (tj. nezáleží na uzávorkování). Každá množina A má své identické zobrazení* id_A *– pokud toto zobrazení složíme s jiným zobrazením f (z nebo do množiny A), obdržíme opět f.*

Pokud tyto fundamentální vlastnosti (skládání, asociativitu a existenci identit) extrahujeme a zapomeneme na množiny, dostaneme pojem kategorie:

Definice. *Kategorie* je soubor skládající se z:

(i) třídy *objektů*,
(ii) třídy *šipek*.

Přitom jsou splněna následující pravidla: Každá šipka f má jednoznačně daný svůj počáteční objekt A a koncový objekt B (píšeme $f\colon A \to B$. Pro každou dvojici šipek $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ existuje šipka $gf\colon A \to C$ – *složení* šipek f a g. Skládání je asociativní, neboli pro $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ a $h\colon C \to D$ platí $(hg)f = h(gf)$. Konečně každý objekt A má *identickou* šipku $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ tak, že pro každou šipku $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to A$ platí $f\,\mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_A\, f = f$.

Příklad. Dokaž z definice kategorie, že šipka id_A je jednoznačná.

Příklad. Množiny (jako objekty) a zobrazení (jako šipky) tvoří kategorii.

Speciální šipky

Definice. Zobrazení $f\colon A \to B$ je *prosté*, pokud z $f(x) = f(y)$ plyne $x = y$. Zobrazení f je *na*, pokud obraz f je celá množina B. Pokud je f prosté i na, říkáme, že jde o *bijekci*.

Tvrzení. *Zobrazeni $f\colon A \to B$ je prosté, pokud platí jedna z následujících podmínek:*

(1) *Existuje zobrazení $g\colon B \to A$ tak, že $gf = \mathrm{id}_A$. Této vlastnosti také říkáme, že f má pravý inverz.*
(2) *Zobrazení f můžeme „krátit zleva“, tj. pro každou množinu X a dvě zobrazení $g, h\colon X \to A$, pro které platí $fg = fh$ platí také $g = h$. Této vlastnosti říkáme, že f je monomorfismus.*

Obdobné tvrzení platí pro zobrazení na, stačí jen vyměnit slova jako „pravý“ za „levý“. Jenže důkaz není tak jasný, jako v případě prostého zobrazení.

Cvičení. Uvědom si, že ekvivalence trvzení „f je na“ a „f se dá krátit zprava“ je ekvivalentní s axiomem výběru.

Tvrzení. *Zobrazení $f\colon A \to B$ je bijekce právě tehdy, když existuje (tzv. inverzní zobrazení) $g\colon B \to A$ tak, že $gf = \mathrm{id}_A$ a $fg = \mathrm{id}_B$. Této vlastnosti říkáme, že f je izomorfismus.*

Pravé inverzy, monomorfismy či izomorfismy můžeme definovat v libovolné kategorii, protože jsme v jejich definici používali pouze objekty, šipky, skládání a identity. Naopak prosté zobrazení je pojem, který je definován pomocí prvků množiny, ale mnoho kategorií má objekty, kde nemá o prvcích smysl mluvit (viz další příklad). To, že v kategorii množin tyto tři pojmy souhlasí, je šťastná náhoda, která není pravidlem.

Příklad. Za objekty zvolme všechna reálná čísla. Pokud pro reálná a a b platí, $a \geq b$, řekneme, že z a do b vede právě jedna šipka (a nezáleží na tom, jak ji pojmenujeme). V opačném případě mezi a a b žádná šipka nevede. Je jasné, jak se mají šipky skládat, a jednoduché ověřit, že takto obdržíme kategorii. Značíme ji $(\mathbb{R}, \geq)$. Analogicky můžeme definovat například kategorii přirozených čísel $(\mathbb{N}, \geq)$ nebo racionálních čísel $(\mathbb{Q}, \geq)$.

Eukleidovské prostory

Definice. *Eukleidovský prostor* (*E-prostor*) dimenze n je množina všech n-tic reálných čísel spolu s operací „sčítání“: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ a operací „násobení prvku prostoru reálným číslem r“: $r \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$.

Definice. Zobrazení mezi E-prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ nazýváme *lineární*, pokud pro každé dva body a, b prostoru $\mathbb{R}^m$ a reálné číslo r splňuje

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,
(2) $f(ra) = rf(a)$.

Příklad. Identické zobrazení je lineární. Složení dvou lineárních zobrazení je lineární.

Duo E-prostory + lineární zobrazení vyhovuje naší definici kategorie.

Příklad. Lineárnímu zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ můžeme přirozeně přiřadit matici $m \times n$. Skládání zobrazení pak odpovídá obvyklé násobení matic.

Příklad. Pokud za objekty vezmeme přirozená čísla, šipky z m do n budou všechny matice a skládání bude násobení matic, dostaneme kategorii.

Součin a součet

Definice. *Součin* objektů A a B je objekt C spolu s šipkami $a\colon C \to A$ a $b\colon C \to B$, který splňuje „univerzální vlastnost“: Pokud vezmeme nějaký jiný objekt X spolu s šipkami $u\colon X \to A$ a $v\colon X \to B$, existuje právě jedna šipka x z $X \to C$ tak, že $ax = u$ a $bx = v$.

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \\
& X \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Příklad. Najdi nějaký součin v kategorii množin.

Příklad. Co je součin v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$?

Příklad. Co je součin E-prostorů?

Tvrzení. *Součin není definován jednoznačně, ale každé dva součiny jsou izomorfní.*

Ke každému kategoriálnímu pojmu máme pojem duální, který dostaneme tak, že v definici obrátíme všechny šipky. Pokud to provedeme se součinem, dostaneme součet alias koprodukt. Každá kategorie C má duální kategorii C^{op}, která má stejné objekty, ale šipky jsou obrácené.

Příklad. Najdi součet v dosud zmíněných kategoriích.

Tvrzení. (Princip duality) *Pokud nahradíme všechny pojmy v platném tvrzení jejich duálními pojmy, dostaneme opět platné tvrzení. Jinými slovy, v teorii kategorií je vždy automaticky půl hotovo.*

Cvičení. Každé dva součty jsou izomorfní.

Jako nás z kategoriálního pohledu příliš nezajímají samotné množiny, ale spíš zobrazení mezi nimi, podobně je to i s kategoriemi. Proto zavádíme tzv. funktory, což jsou šipky mezi kategoriemi. Dá se říct, že funktory zprostředkovávájí komunikaci mezi různými matematickými světy.

Definice. *Funktor* F mezi kategoriemi C a D je proces,[1] který přiřazuje objektu A z C objekt FA z D a šipce $f\colon A \to B$ šipku $Ff\colon FA \to FB$, přičemž zachovává skládání šipek (nezáleží, zda šipky nejprve složíme a pak pošleme funktorem, nebo naopak) a identity.

Příklad. Maticová reprezentace je funktor z kategorie E-prostorů do kategorie matic, který prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřazuje jeho dimenzi n a lineárnímu zobrazení přiřazuje odpovídající matici.

Pointa maticové reprezentace je, že se z geometrického světa prostorů a lineárních zobrazení dostaneme do suchého světa matic, kde se ale snadno řeší problémy. Tím, že je náš vztah funktor (tj. zachovává skládání a identity), dokázaná tvrzení se snadno přenesou zpět do světa geometrie.

Kategorii teorií můžeme aplikovat na sebe samu. Pokud totiž za objekty zvolíme kategorie[2] a za šipky funktory (je jasné, jak se budou skládat), čímž dostaneme kategorii. Takto například dostaneme definici součinu nebo součtu kategorií.

Příklad. Co je součin a součet kategorií?

Příklad. Součin je funktor z kategorie $C \times C$ do kategorie C.

Úloha. Představ si E-prostor $\mathbb{R}^n$ jako kategorii, která má jeden objekt $*$, šipky jsou prvky $\mathbb{R}^n$ a skládání je sčítání. Co jsou potom funktory z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$? Musí být nutně lineární?

Bisoučin a Ab-kategorie

Definice. *Ab-kategorie* je taková kategorie, že pro libovolné objekty A, B a dvě šipky $f, g\colon A \to B$ existuje součet šipek $f+g$ tak, že jsou splněna následující pravidla:

(i) Sčítání je asociativní a komutativní, existuje šipka „0“ tak, že $f + 0 = f$, a ke každé šipce f existuje šipka „$-f$“ tak, že $f + (-f) = 0$.[3]
(ii) Sčítání a skládání jsou distributivní, tedy pokud máme šipku $h\colon B \to C$, pak platí $h(f + g) = hf + hg$ a obdobně pro šipky do objektu A.

[1] Čtenáři je jasné, že formálně jde o dvojici funkcí (na objektech a šipkách).

[2] Pokud bychom vzali všechny kategorie, dostali bychom množinový paradox podobně jako s množinou všech množin. Můžeme ale vzít například všechny kategorie, které jsou nějak omezené velikostí.

[3] Množinu šipek jsme tak nahradili strukturou, které se říká Abelovská (tj. komutativní) grupa – odtud název.

Definice. *Bisoučin* objektů A a B je objekt C spolu s šipkami $p_a\colon C \to A$, $p_b\colon C \to B$, $i_a\colon A \to C$ a $p_b\colon B \to C$, které splňují následující podmínky:

(i) $p_a i_a = \mathrm{id}_A$, $p_b i_b = \mathrm{id}_B$.
(ii) $p_b i_a = 0$, $p_a i_b = 0$.
(iii) $i_a p_a + i_b p_b = \mathrm{id}_C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i_a"] & C \arrow[l, shift left, "p_a"] \arrow[r, shift right, "p_b"'] & B \arrow[l, shift right, "i_b"'] \end{tikzcd}$$

Tvrzení. *Nechť A a B jsou objekty v Ab-kategorii. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *C je bisoučin A a B.*
(ii) *C je součin A a B.*
(iii) *C je součet A a B.*