

Kategorie

ANIČKA DOLEŽALOVÁ

ABSTRAKT. Přednáška je úvodem do teorie kategorií – abstraktní matematické teorie, kde si vystačíme s puntíky a šípkami.

Od množin ke kategoriím

Základními matematickými objekty našeho světa jsou množiny. Samy o sobě jsou však poněkud chudé, zajímavé začnou být, až když se začneme zabývat zobrazeními mezi nimi. Bez zobrazení například nedokážeme měřit velikosti množin.

Tvrzení. (vlastnosti zobrazení) *Zobrazení mezi množinami můžeme skládat a toto skládání je asociativní (tj. nezáleží na uzávkování). Každá množina A má své identické zobrazení id_A – pokud toto zobrazení složíme s jiným zobrazením f (z nebo do množiny A), obdržíme opět f .*

Pokud tyto fundamentální vlastnosti (skládání, asociativitu a existenci identit) extrahujeme a zapomeneme na množiny, dostaneme pojem kategorie:

Definice. *Kategorie* je soubor skládající se z

- (i) třídy *objektů*,
- (ii) třídy *šipek*.

Přitom jsou splněna následující pravidla: Každá šipka f má jednoznačně daný svůj počáteční objekt A a koncový objekt B (píšeme $f : A \rightarrow B$). Pro každou dvojici šipek $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$ existuje šipka $gf : A \rightarrow C$ – *složení* šipek f a g . Skládání je asociativní, neboli pro $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ a $h : C \rightarrow D$ platí $(hg)f = h(gf)$. Konečně, každý objekt A má *identickou* šipku $id_A : A \rightarrow A$ tak, že pro každou šipku $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow A$ platí $f id_A = f$ a $id_B f = f$.

Cvičení 1. Dokaž z definice kategorie, že šipka id_A je jednoznačná.

Příklad 2. Množiny (jako objekty) a zobrazení mezi nimi (jako šípky) tvoří kategorii.

Příklad 3. (pro čtenáře seriálu) Grupy spolu s grupovými homomorfismy tvoří kategorii.

Speciální šipky

Definice. Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je *prosté*, pokud z $f(x) = f(y)$ plyne $x = y$. Zobrazení f je *na*, pokud obraz f je celá množina B . Pokud je f prosté i na, říkáme, že jde o *bijekci*.

Tvrzení. Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je prosté, pokud platí jedna z následujících podmínek:

- (i) Existuje zobrazení $g : B \rightarrow A$ tak, že $gf = id_A$. Této vlastnosti také říkáme, že f má levý inverz.
- (ii) Zobrazení f můžeme „krátit zleva“, tj. pro každou množinu X a dvě zobrazení $g, h : X \rightarrow A$, pro které platí $fg = fh$, platí také $g = h$. Této vlastnosti říkáme, že f je *monomorfismus*.

Obdobné tvrzení platí pro zobrazení na. Stačí pouze zaměnit slova „levý“ a „pravý“. Pokud se f dá krátit zprava, říkáme, že jde o *epimorfismus*.

Tvrzení. Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je bijekce právě tehdy, když existuje (tzv. inverzní zobrazení) $g : B \rightarrow A$ tak, že $gf = id_A$ a $fg = id_B$. Této vlastnosti říkáme, že f je *izomorfismus*.

Při definici prostého zobrazení jsme využívali prvků množiny a hodnot zobrazení f na nich. Definovat v kategoriích prosté zobrazení nedává smysl, protože by se objekty musely skládat z prvků, což vůbec nemusí být pravda. Naopak pro pojmy jako pravý inverz nebo monomorfismus jsme používali pouze kategoriální pojmy – levé (resp. pravé) inverzy, monomorfismy (resp. epimorfismy) a izomorfismy definujeme tak, že v podmínkách ze dvou posledních tvrzeních nahradíme slovo „množina“ slovem „objekt“ a „zobrazení“ slovem „šipka“. Tyto pojmy tedy máme v libovolné kategorii. To, že v kategorii množin pojmy prosté-mono, na-epi, bijekce-izo souhlasí, je šťastná náhoda, která není pravidlem.

Příklad 4. Za objekty zvolme všechna reálná čísla. Pokud pro reálná a a b platí $a \geq b$, řekneme, že z a do b vede (právě jedna) šipka. Nezáleží na tom, jak ji pojmenujeme. V opačném případě mezi a a b žádná šipka nevede. Je jasné, jak se mají šipky skládat, a jednoduché ověřit, že takto obdržíme kategorii. Značíme ji (\mathbb{R}, \geq) . Analogicky můžeme definovat například kategorii přirozených čísel (\mathbb{N}, \geq) nebo racionálních čísel (\mathbb{Q}, \geq) .

Cvičení 5. Najděte kategorii, ve které existuje epimorfismus, který není na.

Odbočka do eukleidovských prostorů

Definice. *Eukleidovský prostor* (*E-prostor*) dimenze n je množina všech n -tic reálných čísel spolu s operací „sčítání“: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ a operací „násobení prvku prostoru reálným číslem r “: $r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$.

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazýváme *lineární*, pokud pro každé dva body a, b prostoru \mathbb{R}^m a reálné číslo r splňuje

- (i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
- (ii) $f(ra) = rf(a)$.

Cvičení 6. Identické zobrazení je lineární. Složení dvou lineárních zobrazení je lineární.

Cvičení 7. Dvojice E -prostory + lineární zobrazení vyhovuje naší definici kategorie.

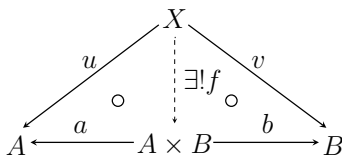
Příklad 8. Lineárnímu zobrazení \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^n můžeme přirozeně přiřadit matici $m \times n$. Skládání zobrazení pak odpovídá obvyklé násobení matic.

Příklad 9. Pokud za objekty vezmeme přirozená čísla, šipky z m do n budou všechny matice $m \times n$ a skládání bude násobení matic, dostaneme kategorii.

Příklad 10. Pokud místo E -prostorů vezmeme všechny vektorové prostory (tedy například i ty nekonečně dimenzionální) a šipky budou opět lineární zobrazení mezi nimi, dostaneme kategorii.

Součin a kosoučin

Definice. *Součin* objektů A a B je objekt C spolu s šípkami $a : C \rightarrow A$ a $b : C \rightarrow B$, který splňuje „univerzální“ vlastnost: Pokud vezmeme jakýkoliv objekt X spolu s šípkami $u : X \rightarrow A$ a $v : X \rightarrow B$, existuje právě jedna šipka f z X do C tak, že $af = u$ a $bf = v$. Objekt C budeme značit $A \times B$ nebo $A \amalg B$.



Příklad 11. Co je součin v kategorii množin?

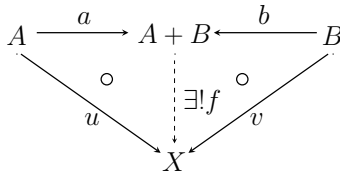
Příklad 12. Co je součin v kategorii (\mathbb{R}, \geq) ?

Příklad 13. Co je součin v kategorii E -prostorů (vektorových prostorů)?

Tvrzení 14. *Součin není definován jednoznačně, ale každé dva součiny jsou izomorfní (tj. existuje mezi nimi izomorfismus).*

Poznámka 15. Součin nemusí existovat.

Ke každému kategoriálnímu pojmu máme pojem duální, který dostaneme tak, že v definici obrátíme všechny šipky. Pokud to provedeme se součinem, dostaneme *kosoučin* alias *součet* (značíme symbolem $+$ nebo \amalg). Pro kategorii C označíme C^{op} tu kategorii, která má stejné objekty, ale obrácené šipky. Říkáme jí *duální kategorie*.



Příklad 16. Co je kosoučin v dosud zmíněných kategoriích?

Tvrzení. (Princip duality) *Pokud nahradíme všechny pojmy v platném tvrzení jejich duálními pojmy, dostaneme opět platné tvrzení. Jinými slovy, v teorii kategorií je vždy automaticky půl práce hotovo.*

Důsledek. *Každé dva kosoučiny jsou izomorfní.*

Součin i kosoučin se dají zobecnit pro více objektů. Jsou asociativní a komutativní až na izomorfismus.

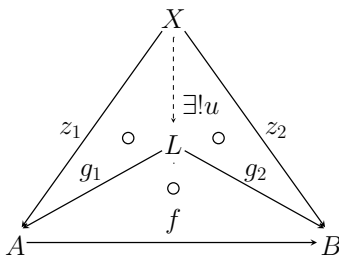
Příklad 17. Co je součin a kosoučin (libovolné třídy objektů) v dosud zmíněných kategoriích?

Limity a kolimity

Součiny a kosoučiny vycházejí pouze z objektů. Co když bychom ale chtěli mít mezi těmito objekty ještě nějaké šipky?

Definice. (neformální) Mějme kategorii C a v ní A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A . *Kuželem* nad A a F nazveme objekt B z kategorie C a G třídu šipek z objektu B do (každého) objektu z A takové, že pro libovolná složení šipek z F a G , která dávají smysl a začínají a končí v téže objektech, jsou stejná. Analogicky definujeme *kokůžel* (obrátime šipky).

Definice. (jen trochu neformální) Mějme kategorii C , A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A . Necht' L se šipkami G je kužel nad A a F . Řekneme, že L je *limita* A a F , pokud pro libovolný jiný kužel (X, Z) nad A a F existuje v C právě jedna šipka u z X do L taková, že složením u se šipkou z G dostaneme šipku ze Z .



Cvičení 18. Rozmyslete si, že součin je limita, kde nejsou žádné šipky mezi objekty.

Příklad 19. Uvažujme kategorii množin. Jak vypadá limita a kolimita objektů $\{A_n = \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$ se šipkami $\{f_n : A_n \rightarrow A_{n+1}, f_n(k) = k, k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$?

Poznámka. Limita, podobně jako součin, nemusí nutně existovat.

Funktory

Jako nás z kategoriálního pohledu příliš nezajímají samotné množiny, ale spíš zobrazení mezi nimi, podobně je to i s kategoriemi. Proto zavádíme tzv. funktory, což jsou šipky mezi kategoriemi. Dá se říct, že funktory zprostředkovávají komunikaci mezi různými matematickými světy.

Definice. *Funktor* F mezi kategoriemi C a D je proces¹, který přiřazuje objektu A z C objekt $F(A)$ z D a šipce $f : A \rightarrow B$ šipku $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, přičemž zachovává skládání šipek (nezáleží, zda nejdřív šipky složíme a pak pošleme funktorem, nebo naopak) a identity.

Příklad 20. Zapomínající funktor (z kategorie E -prostorů do kategorie množin) vezme E -prostor a zapomene, že se v něm dalo sčítat a násobit prvky reálným číslem. Zbude holá množina n -tic. Obecně zapomínající funktor z kategorie nějakých „strukturovaných“ objektů, jako jsou vektorové prostory, topologické prostory nebo grupy, do kategorie všech množin přiřadí každému původnímu objektu jeho nosnou množinu (bez struktury).

¹Čtenáři je jasné, že formálně jde o dvojici funkcí (na objektech a šipkách).

Příklad 21. Proces \mathcal{P} , který přiřadí množině A její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$ a zobrazení f mezi A a B přiřadí zobrazení $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, $X \mapsto \{f(x), x \in X\}$, je funktor z kategorie množin do kategorie množin.

Příklad 22. Maticová reprezentace je funktor $M : Euc \rightarrow Mat$, který prostoru \mathbb{R}^n přiřazuje jeho dimenzi n a lineárnímu zobrazení přiřazuje odpovídající matici.

Výhoda maticové reprezentace je, že se z geometrického světa prostorů a lineárních zobrazení dostaneme do suchého světa matic, kde se ale snadno řeší problémy. Tím, že je náš vztah funktor (tj. zachovává skládání a identity), se dokázaná tvrzení snadno přenesou zpět do světa geometrie.

Teorii kategorií nyní můžeme aplikovat na sebe. Pokud totiž za objekty zvolíme kategorie² a za šipky funktry (je jasné, jak se budou skládat), dostaneme kategorii. Takto například dostaneme definici součinu nebo součtu kategorií.

Příklad 23. Co jsou funktry z kategorie (\mathbb{R}, \geq) do (\mathbb{R}, \geq) ?

Cvičení 24. Představme si E -prostor \mathbb{R}^n jako kategorii, která má jeden objekt $*$, šipky jsou prvky \mathbb{R}^n a skládání je sčítání. Co jsou potom funktry z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m ? Musí být nutně lineární?

Návody

5. Každé spojitě zobrazení \mathbb{R} do \mathbb{R} je jednoznačně určeno hodnotami na racionálních číslech.

17. Součín má tendenci „chovat se hezky“ při přechodu k nekonečnému součínu, kosoučín ne vždy. V kategorii množin půjde (co se objektu týče) o kartézský součín a disjunktní sjednocení, v kategorii (\mathbb{R}, \geq) o supremum a infimum, v kategorii E -prostorů (vektorových prostorů) o kartézský součín a direktní součet prostorů (rozmyslete si, proč nemusí existovat vhodné lineární zobrazení z celého kartézského součínu tak, aby byl kosoučínem). Příslušná zobrazení jsou projekce (resp. vnoření) pro množiny i vektorové prostory a jediné možné šipky pro (\mathbb{R}, \geq) .

19. Jsou to množiny $\{1\}$ a \mathbb{N} se zobrazením $1 \mapsto 1$, respektive s vnořením (vnímáme f_n jako zobrazení do \mathbb{N}).

23. Funkce, které zachovávají šipky mezi každými dvěma čísly, tj. neklesající funkce.

24. Jsou to právě lineární zobrazení \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m .

Literatura a zdroje

- [1] Pepa Svoboda: *Kategorie*, Uhelná Příbram, 2014.

²Pokud bychom vzali všechny kategorie, dostali bychom množinový paradox podobně jako s množinou všech množin. Můžeme ale vzít například všechny kategorie, které jsou nějak omezené velikostí.