Kategorie

Anička Doležalová

Abstrakt. Přednáška je úvodem do teorie kategorií – abstraktní matematické teorie, kde si vystačíme s puntíky a šipkami.

Od množin ke kategorii

Základními matematickými objekty našeho světa jsou množiny. Samy o sobě jsou však poněkud chudé, zajímavé začnou být, až když se začneme zabývat zobrazeními mezi nimi. Bez zobrazení například nedokážeme měřit velikosti množin.

Tvrzení. (vlastnosti zobrazení) *Zobrazení mezi množinami můžeme skládat a toto skládání je asociativní (tj. nezáleží na uzávorkování). Každá množina A má své identické zobrazení id_A – pokud toto zobrazení složíme s jiným zobrazením f (z nebo do množiny A), obdržíme opět f.*

Pokud tyto fundamentální vlastnosti (skládání, asociativitu a existenci identit) extrahujeme a zapomeneme na množiny, dostaneme pojem kategorie:

Definice. *Kategorie* je soubor skládající se z

(i) třídy *objektů*,
(ii) třídy *šipek*.

Přitom jsou splněna následující pravidla: Každá šipka f má jednoznačně daný svůj počáteční objekt $\boldsymbol{A}$ a koncový objekt $\boldsymbol{B}$ (píšeme $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$). Pro každou dvojici šipek $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ existuje šipka $gf : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ – *složení* šipek f a g. Skládání je asociativní, neboli pro $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ a $h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ platí $(hg)f = h(gf)$. Konečně, každý objekt $\boldsymbol{A}$ má *identickou* šipku $id_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ tak, že pro každou šipku $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ platí $fid_{\boldsymbol{A}} = f$ a $id_{\boldsymbol{B}}f = f$.

Cvičení 1. Dokaž z definice kategorie, že šipka $id_{\boldsymbol{A}}$ je jednoznačná.

Příklad 2. Množiny (jako objekty) a zobrazení mezi nimi (jako šipky) tvoří kategorii.

Příklad 3. (pro čtenáře seriálu) Grupy spolu s grupovými homomorfismy tvoří kategorii.

Speciální šipky

Definice. Zobrazení $f : A \to B$ je *prosté*, pokud z $f(x) = f(y)$ plyne $x = y$. Zobrazení f je *na*, pokud obraz f je celá množina B. Pokud je f prosté i na, říkáme, že jde o *bijekci*.

Tvrzení. *Zobrazeni $f : A \to B$ je prosté, pokud platí jedna z následujících podmínek:*

(i) *Existuje zobrazení $g : B \to A$ tak, že $gf = id_A$. Této vlastnosti také říkáme, že f má levý inverz.*
(ii) *Zobrazení f můžeme „krátit zleva", tj. pro každou množinu X a dvě zobrazení $g, h : X \to A$, pro které platí $fg = fh$, platí také $g = h$. Této vlastnosti říkáme, že f je monomorfismus.*

Obdobné tvrzení platí pro zobrazení na. Stačí pouze zaměnit slova „levý" a „pravý". Pokud se f dá krátit zprava, říkáme, že jde o *epimorfismus*.

Tvrzení. *Zobrazení $f : A \to B$ je bijekce právě tehdy, když existuje (tzv. inverzní zobrazení) $g : B \to A$ tak, že $gf = id_A$ a $fg = id_B$. Této vlastnosti říkáme, že f je izomorfismus.*

Při definici prostého zobrazení jsme využívali prvků množiny a hodnot zobrazení f na nich. Definovat v kategoriích prosté zobrazení nedává smysl, protože by se objekty musely skládat z prvků, což vůbec nemusí být pravda. Naopak pro pojmy jako pravý inverz nebo monomorfismus jsme používali pouze kategoriální pojmy – levé (resp. pravé) inverzy, monomorfismy (resp. epimorfismy) a izomorfismy definujeme tak, že v podmínkách ze dvou posledních tvrzeních nahradíme slovo „množina" slovem „objekt" a „zobrazení" slovem „šipka". Tyto pojmy tedy máme v libovolné kategorii. To, že v kategorii množin pojmy prosté-mono, na-epi, bijekce-izo souhlasí, je šťastná náhoda, která není pravidlem.

Příklad 4. Za objekty zvolme všechna reálná čísla. Pokud pro reálná a a b platí $a \geq b$, řekneme, že z a do b vede (právě jedna) šipka. Nezáleží na tom, jak ji pojmenujeme. V opačném případě mezi a a b žádná šipka nevede. Je jasné, jak se mají šipky skládat, a jednoduché ověřit, že takto obdržíme kategorii. Značíme ji $(\mathbb{R}, \geq)$. Analogicky můžeme definovat například kategorii přirozených čísel $(\mathbb{N}, \geq)$ nebo racionálních čísel $(\mathbb{Q}, \geq)$.

Cvičení 5. Najděte kategorii, ve které existuje epimorfismus, který není na.

Odbočka do eukleidovských prostorů

Definice. *Eukleidovský prostor* (*E-prostor*) dimenze n je množina všech n-tic reálných čísel spolu s operací „sčítání“: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ a operací „násobení prvku prostoru reálným číslem r“: $r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$.

Definice. Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nazýváme *lineární*, pokud pro každé dva body a, b prostoru $\mathbb{R}^m$ a reálné číslo r splňuje

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,
(ii) $f(ra) = rf(a)$.

Cvičení 6. Identické zobrazení je lineární. Složení dvou lineárních zobrazení je lineární.

Cvičení 7. Dvojice E-prostory + lineární zobrazení vyhovuje naší definici kategorie.

Příklad 8. Lineárnímu zobrazení $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ můžeme přirozeně přiřadit matici $m \times n$. Skládání zobrazení pak odpovídá obvyklé násobení matic.

Příklad 9. Pokud za objekty vezmeme přirozená čísla, šipky z m do n budou všechny matice $m \times n$ a skládání bude násobení matic, dostaneme kategorii.

Příklad 10. Pokud místo E-prostorů vezmeme všechny vektorové prostory (tedy například i ty nekonečně dimenzionální) a šipky budou opět lineární zobrazení mezi nimi, dostaneme kategorii.

Součin a kosoučin

Definice. *Součin* objektů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je objekt $\boldsymbol{C}$ spolu s šipkami $a : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{A}$ a $b : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, který splňuje „univerzální“ vlastnost: Pokud vezmeme jakýkoliv objekt $\boldsymbol{X}$ spolu s šipkami $u : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}$ a $v : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{B}$, existuje právě jedna šipka f z $\boldsymbol{X}$ do $\boldsymbol{C}$ tak, že $af = u$ a $bf = v$. Objekt $\boldsymbol{C}$ budeme značit $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{A} \Pi \boldsymbol{B}$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "v"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B
\end{tikzcd}$$

Příklad 11. Co je součin v kategorii množin?

Příklad 12. Co je součin v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$?

Příklad 13. Co je součin v kategorii E-prostorů (vektorových prostorů)?

Tvrzení 14. *Součin není definován jednoznačně, ale každé dva součiny jsou izomorfní (tj. existuje mezi nimi izomorfismus).*

Poznámka 15. Součin nemusí existovat.

Ke každému kategoriálnímu pojmu máme pojem duální, který dostaneme tak, že v definici obrátíme všechny šipky. Pokud to provedeme se součinem, dostaneme *kosoučin* alias *součet* (značíme symbolem + nebo $\amalg$). Pro kategorii C označíme C^{op} tu kategorii, která má stejné objekty, ale obrácené šipky. Říkáme jí *duální kategorie.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "u"'] & A+B \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & B \arrow[l, "b"'] \arrow[dl, "v"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Příklad 16. Co je kosoučin v dosud zmíněných kategoriích?

Tvrzení. (Princip duality) *Pokud nahradíme všechny pojmy v platném tvrzení jejich duálními pojmy, dostaneme opět platné tvrzení. Jinými slovy, v teorii kategorií je vždy automaticky půl práce hotovo.*

Důsledek. *Každé dva kosoučiny jsou izomorfní.*

Součin i kosoučin se dají zobecnit pro více objektů. Jsou asociativní a komutativní až na izomorfismus.

Příklad 17. Co je součin a kosoučin (libovolné třídy objektů) v dosud zmíněných kategoriích?

Limity a kolimity

Součiny a kosoučiny vycházejí pouze z objektů. Co když bychom ale chtěli mít mezi těmito objekty ještě nějaké šipky?

Definice. (neformální) Mějme kategorii C a v ní A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A. *Kuželem* nad A a F nazveme objekt $\boldsymbol{B}$ z kategorie C a G třídu šipek z objektu B do (každého) objektu z A takové, že pro libovolná složení šipek z F a G, která dávají smysl a začínají a končí v téže objektech, jsou stejná. Analogicky definujeme *kokužel* (obrátíme šipky).

Definice. (jen trochu neformální) Mějme kategorii C, A třídu objektů a F třídu šipek mezi objekty z A. Nechť $\boldsymbol{L}$ se šipkami G je kužel nad A a F. Řekneme, že $\boldsymbol{L}$ je *limita* A a F, pokud pro libovolný jiný kužel $(\boldsymbol{X}, Z)$ nad A a F existuje v C právě jedna šipka u z $\boldsymbol{X}$ do $\boldsymbol{L}$ taková, že složením u se šipkou z G dostaneme šipku ze Z.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, "z_1"'] \arrow[ddr, "z_2"] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& L \arrow[dl, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Cvičení 18. Rozmyslete si, že součin je limita, kde nejsou žádné šipky mezi objekty.

Příklad 19. Uvažujme kategorii množin. Jak vypadá limita a kolimita objektů $\{A_n = \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$ se šipkami $\{f_n : A_n \to A_{n+1}, f_n(k) = k, k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$?

Poznámka. Limita, podobně jako součin, nemusí nutně existovat.

Funktory

Jako nás z kategoriálního pohledu příliš nezajímají samotné množiny, ale spíš zobrazení mezi nimi, podobně je to i s kategoriemi. Proto zavádíme tzv. funktory, což jsou šipky mezi kategoriemi. Dá se říct, že funktory zprostředkovávají komunikaci mezi různými matematickými světy.

Definice. *Funktor* F mezi kategoriemi C a D je proces[1], který přiřazuje objektu $\boldsymbol{A}$ z C objekt $F(\boldsymbol{A})$ z D a šipce $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ šipku $F(f) : F(\boldsymbol{A}) \to F(\boldsymbol{B})$, přičemž zachovává skládání šipek (nezáleží, zda nejdřív šipky složíme a pak pošleme funktorem, nebo naopak) a identity.

Příklad 20. Zapomínající funktor (z kategorie E-prostorů do kategorie množin) vezme E-prostor a zapomene, že se v něm dalo sčítat a násobit prvky reálným číslem. Zbude holá množina n-tic. Obecně zapomínající funktor z kategorie nějakých „strukturovaných“ objektů, jako jsou vektorové prostory, topologické prostory nebo grupy, do kategorie všech množin přiřadí každému původnímu objektu jeho nosnou množinu (bez struktury).

[1]Čtenáři je jasné, že formálně jde o dvojici funkcí (na objektech a šipkách).

Příklad 21. Proces $\mathcal{P}$, který přiřadí množině A její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$ a zobrazení f mezi A a B přiřadí zobrazení $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), X \mapsto \{f(x), x \in X\}$, je funktor z kategorie množin do kategorie množin.

Příklad 22. Maticová reprezentace je funktor $M : Euc \to Mat$, který prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřazuje jeho dimenzi n a lineárnímu zobrazení přiřazuje odpovídající matici.

Výhoda maticové reprezentace je, že se z geometrického světa prostorů a lineárních zobrazení dostaneme do suchého světa matic, kde se ale snadno řeší problémy. Tím, že je náš vztah funktor (tj. zachovává skládání a identity), se dokázaná tvrzení snadno přenesou zpět do světa geometrie.

Teorii kategorií nyní můžeme aplikovat na sebe. Pokud totiž za objekty zvolíme kategorie[2] a za šipky funktory (je jasné, jak se budou skládat), dostaneme kategorii. Takto například dostaneme definici součinu nebo součtu kategorií.

Příklad 23. Co jsou funktory z kategorie $(\mathbb{R}, \geq)$ do $(\mathbb{R}, \geq)$?

Cvičení 24. Představme si E-prostor $\mathbb{R}^n$ jako kategorii, která má jeden objekt $*$, šipky jsou prvky $\mathbb{R}^n$ a skládání je sčítání. Co jsou potom funktory z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$? Musí být nutně lineární?

Návody

5. Každé spojité zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je jednoznačně určeno hodnotami na racionálních číslech.

17. Součin má tendenci „chovat se hezky“ při přechodu k nekonečnému součinu, kosoučin ne vždy. V kategorii množin půjde (co se objektu týče) o kartézský součin a disjunktní sjednocení, v kategorii $(\mathbb{R}, \geq)$ o supremum a infimum, v kategorii E-prostorů (vektorových prostorů) o kartézský součin a direktní součet prostorů (rozmyslete si, proč nemusí existovat vhodné lineární zobrazení z celého kartézského součinu tak, aby byl kosoučinem). Příslušná zobrazení jsou projekce (resp. vnoření) pro množiny i vektorové prostory a jediné možné šipky pro $(\mathbb{R}, \geq)$.

19. Jsou to množiny $\{1\}$ a $\mathbb{N}$ se zobrazením $1 \mapsto 1$, respektive s vnořením (vnímáme f_n jako zobrazení do $\mathbb{N}$).

23. Funkce, které zachovají šipky mezi každými dvěma čísly, tj. neklesající funkce.

24. Jsou to právě lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Literatura a zdroje

[1] Pepa Svoboda: *Kategorie*, Uhelná Příbram, 2014.

[2] Pokud bychom vzali všechny kategorie, dostali bychom množinový paradox podobně jako s množinou všech množin. Můžeme ale vzít například všechny kategorie, které jsou nějak omezené velikosti.