KAGH – nerovnosti v geometrii

Rasťo Oľhava

Predtým než sa začneme zaoberať samotnými KAGH-nerovnosťami, povieme si čo predstavujú jednotlivé písmenká v tomto podivnom názve.

Priemery

Definícia. Kvadratickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Definícia. Aritmetickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Definícia. Geometrickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Definícia. Harmonickým priemerom *čísel* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *nazývame číslo:*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Veta. (KAGH-nerovnosti) *Pre* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *kladné platí:*

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Na prednáške si ukážeme, ako dokázať toto tvrdenie pomocou jednoduchých geometrických obrazcov. V nich sa pokúsime nájsť úsečky odpovedajúce vyššie uvedeným priemerom a porovnať ich. Pri našom hľadaní sa nám zídu aj niektoré známe vety z geometrie:

Veta. (Euklidova o výške) *Nech $\triangle ABC$ je pravouhlý s preponou AB. Označme v_c veľkosť výšky spustenej z vrcholu C a c_a, c_b dĺžky úsekov vymedzených pätou tejto výšky na strane AB. Potom platí nasledujúci vzťah:*

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Veta. (Pythagorova) *Nech $\triangle ABC$ je pravouhlý s preponou AB. Pri štandardnom označení strán platí:*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Zvyšný čas prednášky vyplníme podľa chuti. Napríklad rôznymi aritmetickými dôkazmi uvedených nerovností, definovaním mocninného priemeru rádu p.