Jensenova nerovnost

Martin Töpfer

Abstrakt. Jensenova nerovnost je překvapivě silná a může pomoct, když klasické AG nebo CS selžou. Obecně si rozumí i se složitějšími funkcemi a díky tomu ji budete pravidelně potkávat i na vysoké škole.

Konvexní kombinace

Definice. Nechť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a navíc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak číslo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ nazýváme *konvexní kombinací* čísel $x_1, \ldots, x_n$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší a x_n největší z čísel $x_1, \ldots, x_n$, leží každá konvexní kombinace těchto čísel v intervalu $\langle x_1, x_n\rangle$.

Pro práci s Jensenovou nerovností je klíčové porozumět konvexním kombinacím (bodů) v rovině.

Definice. Nechť $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ jsou souřadnice n bodů v rovině, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak bod o souřadnicích

$$[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$.

Cvičení. Co je množinou všech konvexních kombinací daných dvou (tří, čtyř, atd.) bodů v rovině? A co v prostoru?

Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

řekneme, že f je *konvexní* na I.

Duálně (s opačnou nerovností) definujeme *konkávní* funkci. Pokud pro $\lambda \in (0, 1)$ platí ostrá varianta uvedené nerovnosti, mluvíme o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci.

Cvičení. Rozmyslete si, co nerovnost definující konvexitu (resp. konkavitu) znamená geometricky.

Cvičení. Zjistěte, které z elementárních funkcí jsou na nějakých intervalech konvexní (resp. konkávní).

Jensenova nerovnost

Věta. *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Často nám bude stačit jednodušší tvar nerovnosti, kdy jsou všechny $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \ldots x_n}{n}\right).$$

Cvičení. Interpretujte obě strany rovnosti geometricky pomocí konvexních kombinací bodů a uvědomte si, že tvrzení se tím stává téměř triviálním.

Cvičení. Rozmyslete si, kdy v Jensenově nerovnosti nastává rovnost.

Nyní si můžeme blahopřát, neboť jsme téměř zadarmo získali velmi obecně vyhlížející nerovnost, která se ukáže být silnou zbraní. Ke správnému použití Jensenovy nerovnosti je třeba umět rozhodnout, zda je daná funkce konvexní (resp. konkávní). K tomu se v praxi používá následující lemma.

Lemma. *Má-li funkce f na intervalu I nezápornou (resp. nekladnou) druhou derivaci, je f na I konvexní (resp. konkávní).*

Pokud jste o derivaci (natož nějaké druhé derivaci) neslyšeli, nezoufejte. U jednoduchých funkcí se dá konvexita/konkavita dobře odhadnout z grafu, případně lze použít vhodný matematický software. Přísně korektní zdůvodnění se v tomto případě nevyžaduje ani v MO, o jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní či konkávní. Konvexní jsou například $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $\mathbb{R}^+$ nebo sudé mocniny x na $\mathbb{R}$. Typické konkávní funkce jsou $\sqrt{x}$ nebo $\log(x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Logaritmus

Občas se při používání Jensenovy nerovnosti setkáme s logaritmem. Užitečný pro nás bude, protože svým způsobem převádí násobení na sčítání a mocnění na násobení. Přesněji o tom hovoří následující poznámka.

Poznámka. Nechť $a > 1$. Funkce $f(x) = \log_a(x)$ definovaná na $\mathbb{R}^+$ jako inverzní funkce k $g(x) = a^x$ má následující vlastnosti:

(i) f je rostoucí ryze konkávní funkce na $\mathbb{R}^+$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$,

(iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

(iv) $f(x^y) = yf(x)$.

Motivační příklady

Konečně se dostáváme k úlohám. Začneme zlehka:

Příklad. Ukažte, že pro každé reálné $x > 1$ platí:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení. Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $f(x) = 1/x$, která je konvexní na $\mathbb{R}^+$, a konvexní kombinaci kladných čísel $x-1$, x, $x+1$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \geq \frac{1}{\frac{x-1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Jistě by vám nedělalo problém tuto nerovnost dokázat zcela přímočaře roznásobením. Zkusíme tedy něco těžšího – zástupce typické skupiny úloh řešitelných Jensenovou nerovností:

Příklad. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Jensenovu nerovnost aplikujeme na funkci $f(x) = \sin x$ konkávní na intervalu $(0, \pi)$. Platí $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, tedy

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U této nerovnosti bychom již přímočařejší přístup hledali těžko. Jensenova nerovnost je pro dokazování nerovností pro úhly v trojúhelníku často užitečná, neboť známe jejich součet (a tedy i tu nejjednodušší konvexní kombinaci).

Pořád je to moc snadné? Jensenova nerovnost jde použít i na dokazování nerovností mezi průměry:

Tvrzení. *(AH nerovnost) Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Tvrzení. *(AG nerovnost) Pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Nyní už víme dost, abychom se mohli pustit do řešení skutečných úloh. Nezapomeňte, že Jensenova nerovnost platí pro každou konvexní (resp. konkávní) funkci, takže pokud kýžená nerovnost hned napoprvé nevyjde, není důvod házet Jensena do žita – prostě zkuste jinou funkci. Tak hurá do toho!

Úlohy na rozehřátí

Úloha 1. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1 \rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Úloha 2. Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b splňující $a + b = 1$ platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Úloha 4. Pro α, β, γ úhly v trojúhelníku dokažte nerovnosti

(i) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$,

(ii) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

(iii) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.

Úloha 5. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sqrt[4]{27\left(a^7 + b^7 + c^7\right)} \geq \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[4]{b^7} + \sqrt[4]{c^7}.$$

Úloha 6. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{1}{1+2xy}.$$

Pořádné úlohy

Úloha 7. Ukažte, že v ostroúhlém trojúhelníku platí

$$a+b+c \geq \sqrt{2bc\cos\alpha}+\sqrt{2ac\cos\beta}+\sqrt{2ab\cos\gamma}.$$

Úloha 8. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Úloha 9. Pro $a, b \geq 0$ dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

(MO 63–III–6)

Úloha 10. Pro reálná $x_1, \ldots, x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}+1}.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 11. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Karamatova nerovnost

Podobně jako můžeme vážit AG nerovnosti a když nás to přestane bavit, objevíme Muirheadovu nerovnost, tak i v případě Jensenovy nerovnosti existuje zobecnění, které se zbaví omezení, že na pravé straně odhadu je jen funkční hodnota váženého průměru čísel. Abychom tuto obecnou verzi nerovnosti mohli snadno popsat, zavedeme následující značení:

Definice 12. Řekneme, že konečná posloupnost $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *majorizuje* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (budeme značit $a \succ b$), když má následující vlastnosti:

(1) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$,
(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ pro všechna $1 \geq i \geq n$,
(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Věta 13. (Karamatova) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in I$, že $x \succ y$ platí*

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + \dots + f(y_n).$$

Pro konkávní funkci platí obrácená nerovnost.

Úloha 14. Dokažte, že

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Úloha 15. Pro a, b, c strany trojúhelníku dokažte

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

(APMO 1996)

Zdroje

Sborníkový příspěvek vychází z přednášky na stejné téma od Davida Hrušky. Změnou prošly hlavně náročnější úlohy a byla přidána sekce o Karamatova nerovnosti založená na A Brief Introduction to Olympiad Inequalities od Evan Chena.