Jensenova nerovnost

Pavel Podbrdský

Konvexní a jim podobné funkce

V této kapitole se budeme zabývat konvexními funkcemi, tedy jejich vlastnostmi a tím, jak je poznáme.

Definice. *Řekneme, že n-tice reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ má vlastnost $(\heartsuit)$, pokud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0,1)$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.*

Definice. *Nechť I je interval a f reálná funkce definovaná na I. Řekneme, že funkce f je na I*
(1) *konvexní, pokud $(\forall\, x, y \in I)(\forall\, \alpha, \beta$ s vl. $(\heartsuit))(f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y))$.*
(2) *ryze konvexní, pokud $(\forall\, x, y \in I)(\forall\, \alpha, \beta$ s vl. $(\heartsuit))(f(\alpha x + \beta y) < \alpha f(x) + \beta f(y))$.*
(3) *konkávní, pokud $(\forall\, x, y \in I)(\forall\, \alpha, \beta$ s vl. $(\heartsuit))(f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y))$.*
(4) *ryze konkávní, pokud $(\forall\, x, y \in I)(\forall\, \alpha, \beta$ s vl. $(\heartsuit))(f(\alpha x + \beta y) > \alpha f(x) + \beta f(y))$.*

Poznámka. Pojmy konvexní a konkávní funkce f jsou duální při záměně funkce f za $-f$, nerovnosti $\leq$ za $\geq$, atd. Podobně pojem ryze konvexní funkce se od pojmu konvexní funkce liší záměnou $\leq$ za $<$. Proto se dále budeme většinou zabývat pouze konvexními funkcemi. Analogické věty při zmíněné úpravě budou platit i pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Definice. *Symbolem I^0 budeme rozumět množinu všech vnitřních bodů intervalu I.*

Věta. *Nechť I je interval a f funkce definovaná na I. Pak f je konvexní na I $\Longleftrightarrow$ f je spojitá na I^0 a $(\forall\, x, y \in I)(f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2})$.*

Věta. *Nechť f má na I^0 neklesající první derivaci a nechť je f v krajních bodech I spojitá. Pak f je konvexní na I.*

Věta. *Nechť f má na I^0 nezápornou druhou derivaci a nechť je f v krajních bodech I spojitá. Pak f je konvexní na I.*

Příklad. Konvexní funkce jsou například $f(x) = c \cdot x + d$ na $\mathbb{R}$, $\sin x$ na $\langle 0, \pi \rangle$, e^x na $\mathbb{R}$, $-\ln x$ na $(0, \infty)$, … Kromě první jsou všechny ryze konvexní.

Jensenova nerovnost

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je funkce konvexní na I a nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je n-tice s vlastností ($\heartsuit$). Pak pro každou n-tici $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Je-li navíc f ryze konvexní, rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Mocninné průměry

Jistě se většina z vás již setkala s nerovností mezi *aritmetickým* a *geometrickým* průměrem[2]. Existuje však také např. *kvadratický* či *harmonický* průměr, případně lze uvažovat jejich *vážené* varianty. Tyto případy lze přirozeným způsobem zobecnit.

Definice. *Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je n-tice kladných reálných čísel a nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má vlastnost ($\heartsuit$), $t \in \mathbb{R}$. Pak budeme váženým mocninným průměrem řádu t n-tice x rozumět*
(1) $M_t(x, \alpha) = (\alpha_1 x_1^t + \alpha_2 x_2^t + \cdots + \alpha_n x_n^t)^{\frac{1}{t}}$ *pro* $t \neq 0$.
(2) $M_t(x, \alpha) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *pro* $t = 0$.

Poznámka. Pro $\alpha = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ a $t = 1$ (resp. 0, 2, -1) jde o již zmíněný aritmetický (resp. geometrický, kvadratický, harmonický) průměr.

Abychom však mohli nazývat nějaké číslo *průměrem*, mělo by splňovat nějaké přirozené požadavky – např. být mezi nejmenším a největším z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dokážeme si tedy některé vlastnosti mocninných průměrů.

Věta. *Funkce $M_t(x, \alpha)$ je spojitá v proměnné t na $\mathbb{R}$.*

Věta. *Pokud jsou alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ různá, je funkce $M_t(x, \alpha)$ v proměnné t rostoucí na $\mathbb{R}$.*

Věta.
(1) $\lim_{t \to -\infty} M_t(x, \alpha) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
(2) $\lim_{t \to \infty} M_t(x, \alpha) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

[2] Minimálně v našem semináři.