

Jensenova nerovnost

DAVID HRUŠKA

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje s jednou z klasických algebraických nerovností a ukazuje její použití na dokazování nerovností olympiádního typu.

Konvexní kombinace

Definice. Necht $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ a navíc $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak číslo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ nazýváme *konvexní kombinací* čísel x_1, \dots, x_n .

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší a x_n největší z čísel x_1, \dots, x_n , leží každá konvexní kombinace těchto čísel v intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$.

Pro práci s Jensenovou nerovností je klíčové porozumět konvexním kombinacím (bodů) v rovině.

Definice. Necht $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ jsou souřadnice n bodů v rovině, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Pak bod o souřadnicích

$$[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$.

Cvičení. Co je množinou všech konvexních kombinací dvou (tří, čtyř, atd.) bodů v rovině?

Konvexní a konkávní funkce

Definice. Necht $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

řekneme, že f je *konvexní* na I .

Duálně (s opačnou nerovností) definujeme *konkávní* funkci. Pokud platí ostrá varianta uvedené nerovnosti, mluvíme o *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) funkci.

Cvičení. Rozmyslete si, co nerovnost definující konvexitu (resp. konkavitu) znamená geometricky.

Cvičení. Zjistěte, které z elementárních funkcí jsou na nějakých intervalech konvexní (resp. konkávní).

Jensenova nerovnost

Konečně se dostáváme k jádru merita pudla věci.

Tvrzení. *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I . Potom pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in I$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ taková, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, platí*

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Cvičení. Interpretujte obě strany rovnosti geometricky pomocí konvexních kombinací bodů a uvědomte si, že tvrzení se tím stává téměř triviálním.

Cvičení. Rozmyslete si, kdy v Jensenově nerovnosti nastává rovnost.

Nyní si můžeme blahopřát, neboť jsme téměř zadarmo získali velmi obecně vyhlížející nerovnost, která se ukáže být silnou zbraní. Ke správnému použití Jensenovy nerovnosti je třeba umět rozhodnout, zda je daná funkce konvexní (resp. konkávní). K tomu se v praxi používá následující lemma.

Lemma. *Má-li funkce f na intervalu I nezápornou (resp. nekladnou) druhou derivaci, je f na I konvexní (resp. konkávní).*

Pokud jste o derivaci (natož nějaké druhé derivaci) neslyšeli, nezoufejte. U jednoduchých funkcí se dá konvexita/konkavita dobře odhadnout z grafu, případně lze použít vhodný matematický software. Přísně korektní zdůvodnění se v tomto případě nevyžaduje ani v MO, o jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní či konkávní.

Logaritmus

Občas se při používání Jensenovy nerovnosti setkáme s logaritmem. Užitečný pro nás bude, protože svým způsobem převádí násobení na sčítání a mocnění na násobení. Přesněji o tom hovoří následující poznámka.

Poznámka. Nechť $a > 1$. Funkce $f(x) = \log_a(x)$ definovaná na \mathbb{R}^+ jako inverzní funkce k $g(x) = a^x$ má následující vlastnosti:

- (i) f je rostoucí ryze konkávní funkce na \mathbb{R}^+ ,
- (ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$,
- (iii) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$,
- (iv) $f(x^y) = yf(x)$.

Motivační příklady

Konečně se dostáváme k úlohám. Začneme zlehka:

Příklad. Ukažte, že pro každé reálné $x > 1$ platí:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení. Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $f(x) = 1/x$, která je konvexní na \mathbb{R}^+ , a konvexní kombinaci kladných čísel $x-1$, x , $x+1$ s koeficienty

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \geq \frac{1}{\frac{x-1}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Jistě by vám nedělalo problém tuto nerovnost dokázat zcela přímočaře roznásobením. Zkusíme tedy něco těžšího – zástupce typické skupiny úloh řešitelných Jensenovou nerovností:

Příklad. Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Jensenovu nerovnost aplikujeme na funkci $f(x) = \sin x$ konkávní na intervalu $(0, \pi)$. Platí $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, tedy

$$\frac{1}{3} \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin \gamma \leq \sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

U této nerovnosti bychom již přímočařejší přístup hledali těžko. Jensenova nerovnost je pro dokazování nerovností pro úhly v trojúhelníku často užitečná, neboť známe jejich součet (a tedy i tu nejjednodušší konvexní kombinaci).

Pořád je to moc snadné? Na přednášce si ukážeme poněkud magický, ale zato velmi elegantní důkaz tzv. AG-nerovnosti:

Tvrzení. Pro nezáporná čísla x_1, x_2, \dots, x_n platí:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Nyní už víme dost, abychom se mohli pustit do řešení skutečných úloh. Nezapomeňte, že Jensenova nerovnost platí pro každou konvexní (resp. konkávní) funkci, takže pokud kýžená nerovnost hned napoprvé nevyjde, není důvod házet Jensena do žita – prostě zkuste jinou funkci. Tak hurá do toho!

Úlohy na rozeřtání

Úloha 1. Ukařete, ře pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1, 1 \rangle$ platí

$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq \sqrt{4 - (a + b)^2}.$$

Úloha 2. Dokařete, ře pro kladná reálná čísla a, b splňující $a + b = 1$ platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Úloha 3. Dokařete, ře pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 3} + \sqrt{50 - 3x} \leq 12.$$

Úloha 4. Pro α, β, γ úhly v trojúhelníku dokařete nerovnosti

- (i) $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$,
- (ii) $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,
- (iii) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$,
- (iv) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Varování: Část (iv) je trochu zákeřná.

Úloha 5. Pro kladná a, b, c dokařete

$$\sqrt[4]{27(a^7 + b^7 + c^7)} \geq \sqrt[4]{a^7} + \sqrt[4]{b^7} + \sqrt[4]{c^7}.$$

Úloha 6. Kladná reálná čísla x, y splňují $x + y = 1$. Dokařete

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} \geq \frac{1}{1 + 2xy}.$$

Pořádné úlohy

Úloha 7. Pro kladná a, b, c dokařete

$$\frac{a}{(b + c)^2} + \frac{b}{(c + a)^2} + \frac{c}{(a + b)^2} \geq \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

Úloha 8. Pro $a, b \geq 0$ dokařete

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}.$$

Úloha 9. Pro $a, b, c > 0$ dokažte

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{a+b+c}.$$

Úloha 10. Pro reálná $x_1, \dots, x_n \geq 1$ dokažte

$$\frac{1}{x_1+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + 1}.$$

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 11. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Úloha 12. Pro $p \in (0, 3)$ a kladná reálná a, b dokažte nerovnost

$$\sqrt{a^2+pb^2} + \sqrt{b^2+pa^2} \geq a+b+(p-1)\sqrt{ab}.$$

(MO 62–III–6)

Literatura a zdroje

- [1] Michal „Kenny“ Rolínek, Pavel Šalom, *Seriál o nerovnostech*, MKS, 2010
- [2] Miloš Přinosil, *Užití Jensenovy nerovnosti*, Prometheus, 2008