Jak hrát a neprohrát

Filip Hlásek

Abstrakt. V příspěvku se budeme zabývat kombinatorickými hrami s úplnou informací pro dva hráče. Vysvětlíme si základní pojmy, zahrajeme si pár jednodušších her a pak se pustíme do těch obtížnějších. Ve druhé části zavedeme SG-funkci a naučíme se sčítat i složitější hry.

Úmluva. Budeme se zabývat pouze hrami, které splňují následující podmínky:

(1) hrají vždy dva hráči proti sobě a pravidelně se střídají v tazích,
(2) pravidla hry určují pro každého hráče v každé pozici možné další tahy,
(3) jsou konečné a skončí vítězstvím jednoho z hráčů,
(4) jsou s úplnou informací (žádné skryté ani simultánní tahy),
(5) jsou bez náhody.

Hra se může ocitnout v konečném počtu různých stavů[1] jednoho z těchto typů:

(1) V – vyhrávající stav = existuje takový tah, který změní stav hry na P
(2) P – prohrávající stav = všechny povolené tahy změní stav hry na V

Počáteční stav je zpravidla jediný, zatímco koncových může být více a o každém by pravidla hry měla vypovídat, zda je V, nebo P.

Poznámka. Hry, které můžou skončit remízou, vůbec neuvažujeme, ale nebyl by problém podobně zavést také neprohrávající a nevyhrávající stavy.

Věta. *Právě jeden z hráčů má vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice stavů V a P plyne, že pokud se hráč nachází ve stavu V, tak může zahrát takový tah, že soupeř bude během svého tahu ve stavu P a musí prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, tak tímto opakováním první hráč dosáhne vítězství a má tedy vyhrávající strategii. Pokud je ovšem na začátku hra ve stavu P, tak všechny tahy prvního hráče vedou do stavu V a druhý hráč se ocitá v roli prvního v předchozích úvahách a má tedy vyhrávající strategii.

Klíčová slova. teorie her, kombinatorické hry, Nim, Sprague-Grundyho funkce

[1] Stav je jednoznačně popsán pozicí hry a hráčem, který je na tahu.

U každé z následujících her rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Příklad. (Nim) V několika hromádkách je určitý počet kamenů. Hráč, který je na tahu, musí odebrat z jedné hromádky alespoň jeden kámen. Vyhrává hráč, který odebere poslední kámen.

Příklad. (Lámání čokolády) Čokoláda o $m \times n$ čtverečkách se smí lámat rovně po vyznačených čarách. Hráč, který je na tahu, si vybere některý z kousků a jednou ho rozlomí. Hráč, který nemůže nic rozlomit, prohrál.

Příklad. (Lámání čokolády podruhé) Stejná pravidla jako v předchozí hře, ale začíná se s čokoládou $2m \times n$ a nesmí se ulamovat dílky velikosti 1×1.

Příklad. (Čísla v lahvi) V lahvi jsou všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, vyndá z lahve nějaké číslo a všechny jeho dělitele. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad. (Mince v řadě) V řadě je 10 mincí různých hodnot. Hráč, který je na tahu, z jednoho konce řady vezme jednu minci. Vyhrává hráč, který získá největší obnos.

Příklad. (Chomp) Tabulka čokolády je rozlámaná na kostičky. Kostička v levém horním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku a sní ji, všechny kostičky od ní napravo, všechny kostičky od ní dolů a navíc všechny kostičky, které jsou od ní napravo i dolů. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, pokud je tabulka a) čtvercová, b) obdélníková.

Příklad. (Čtvercové piškvorky) Hraje se na čtverečkovaném papíře 10×10. Ve svém tahu nakreslí hráč jeden svůj symbol do nějakého prázdného čtverečku. První hráč se snaží utvořit čtverec 2×2 ze svých symbolů a cílem druhého hráče je mu v tom zabránit.

Příklad. (Razítka) Začíná se na šachovnici 8×8. Hráč, který je na tahu, si vybere prázdné políčko a dá na něj razítko. Vybrané políčko musí hranou sousedit s tím předchozím. První hráč může dát razítko, kam chce. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad. (Šachovnice) Na políčku $(x \geq 0, y \geq 0)$ stojí obyčejný šachový kůň. Hráč, který je na tahu, může udělat tah koněm, ale pouze takový, aby kůň neopustil šachovnici (žádná jeho souřadnice nesmí být záporná) a součet jeho souřadnic klesl. Prohrává hráč, který nemůže táhnout. Jak dopadne hra, když bude několik koňů, každý na jiném počátečním políčku, a hráč může táhnouti, kolika koni chce, ale vždy alespoň jedním? (MO 60–P–III–2)

Příklad. (Přičítání dělitele) Začíná se s dvojkou. V jednom kroku hráč přičte k číslu nějakého jeho vlastního dělitele (to je dělitel menší než číslo samotné). Kdo překročí číslo 2011, vítězí. Má začínající hráč vítěznou strategii? A co kdyby ten, kdo překročí 2011, prohrál?

Sčítání her

Příklad. (Šachovnice podruhé) V pravém dolním rohu každé z N šachovnic o rozměrech $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, \ldots, a_N \times b_N$ stojí figurka. Tou se smí v jednom tahu pohnout pouze nahoru, vlevo nebo šikmo vlevo nahoru, a to buď o jedno nebo o dvě políčka. Hráč, který je na tahu, si vybere šachovnici a udělá na ní takový tah, aby figurka neopustila šachovnici. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Definice. (Sprague-Grundyho funkce) *Sprague-Grundyho funkcí* rozumíme funkci g, která každému stavu v přiřadí nejmenší nezáporné celé číslo n takové, že $n \neq g(u)$ pro všechny stavy u, do kterých se dá dostat tahem ze stavu v.

Tvrzení. *Pokud ve hře prohrává hráč, který nemůže táhnout, potom jsou prohrávající právě ty stavy v, pro které $g(v) = 0$.*

Definice. (Sčítání her) *Součtem her* myslíme hru, v níž si hráč může v každém svém tahu vybrat některou z dílčích her a v ní udělat tah. Pro jednoduchost budeme definovat pouze pro hry, kde prohrává hráč, který již nemůže táhnout.

Definice. (Nim součet) *Nim-součtem* čísel x a y je číslo $x \oplus y$, jemuž se běžně říká binární xor. Jedná se o binární sčítání bez přenosu. Např. $21 \oplus 7 = (10101)_2 \oplus (111)_2 = (10010)_2 = 18$.

Věta. (Sprague, 1936; Grundy, 1939) *Při součtu N her se Sprague-Grundyho funkcemi $g_1, \ldots, g_N$ v počátečních stavech $v_1, \ldots, v_N$ získáme hru $g(v_1, \ldots, v_N) = g_1(v_1) \oplus g_2(v_2) \oplus \cdots \oplus g_N(v_N)$.*

Příklad. (Nim podruhé) Mějme tři hromádky sirek o 9, 10, resp. 14 sirkách. Hráč, který je na tahu, si vybere jednu hromádku a odebere z ní několik sirek. Z první hromádky je možné odebrat 1 až 3 sirky, z druhé 1 až 5 a z té poslední 1 až 7 sirek. Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad. (Northcottova hra) Pozice ve hře je šachovnice 8×8 s jednou černou a jednou bílou figurkou v každém řádku. Hráč, který je na tahu, táhne figurkou svojí barvy o libovolný počet políček vodorovně směrem k figurce soupeře (nesmí ji přeskočit). Prohrává hráč, který nemůže táhnout.

Příklad. (Laskerův Nim) Hra je stejná jako obyčejný Nim, ale navíc lze místo tahu rozdělit hromádku na dvě neprázdné hromádky.

Příklad. (Kayles) Dva kuželkáři stojí před řadou 13 kuželek, přičemž druhá kuželka je již shozená. Oba jsou tak kvalitní, že svým hodem mohou shodit kteroukoliv kuželku nebo dvojici sousedních kuželek. Vítězem je hráč, který shodí poslední kuželku.

Literatura a zdroje

[1] Thomas S. Ferguson: *Game Theory, Part I – Impartial Combinatorial Games*, *http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf*