Iterace

Matěj Doležálek

Abstrakt. Jak zkrotit funkci aplikovanou mnohokrát za sebou? Nakreslíme si obrázek a vydáme se na cestu po šipkách. Možná půjdeme do nekonečna a ještě dál, anebo se možná dostaneme do bludného kruhu, ale s trochou štěstí nám obojí něco poví o zkoumané funkci.

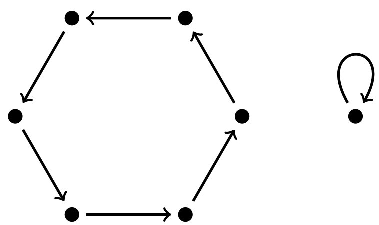
Úmluva. Nechť je f funkce. Pro přirozené n budeme značit

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-krát}})(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(}_{n\text{-krát}}x)\cdots)),$$

tedy f aplikováno n-krát na x, a pro $n = 0$ dodefinujeme $f^0(x) = x$. Kdybychom náhodou chtěli zapsat n-tou mocninu hodnoty $f(x)$, napíšeme $(f(x))^n$.

Úmluva. S funkcí $f\colon M \to M$ budeme zacházet jako s orientovaným grafem na množině vrcholů M. Šipka z a do b povede právě tehdy, když $f(a) = b$. Následně budeme pro takovou funkci používat grafově motivované termíny:

- *Cyklem* nazveme konečnou posloupnost vrcholů, mezi nimiž dokola vedou šipky. Cyklus délky 1 je *pevný bod*, tedy prvek, který se zobrazuje sám na sebe.



- *Řetězem* nazveme posloupnost navzájem různých vrcholů spojených postupně šipkami, která je ve směru šipek nekonečná. Pokud je řetěz nekonečný i proti směru šipek, nazveme jej *oboustranným řetězem*.

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

- *Cestou* z vrcholu bude rozumět posloupnost vrcholů, na něž se dostaneme, když prostě půjdeme po šipkách, což odpovídá opakovanému aplikování funkce na příslušný prvek. Cesta se může buď zacyklit, nebo může být řetězem.

Pozorování. *Funkcím $f\colon M \to M$ odpovídají právě ty grafy na množině vrcholů M, kde z každého vrcholu vychází právě jedna šipka.*

Pozorování. *Pro funkci na konečné množině se cesta z libovolného vrcholu zacyklí.*

Pozorování. *Nechť x leží v cyklu délky k na funkci f. Potom $f^n(x) = x$, právě když $k \mid n$.*

Pozorování. *Funkce uvažovaná jako graf je*

- *prostá, když do každého vrcholu vede* nejvýše *jedna šipka,*
- *na, když do každého vrcholu vede* alespoň *jedna šipka,*
- *bijektivní, když do každého vrcholu vede* právě *jedna šipka.*

Pozorování. *Nechť je M konečná množina. Potom je funkce $f\colon M \to M$ prostá, právě když je na.*

Pozorování. *Bijekce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů a oboustranných řetězů.*

Pozorování. *Prostá funkce se sestává jen z navzájem disjunktních cyklů, jednostranných řetězů a oboustranných řetězů. Počáteční vrcholy jednostranných řetězů jsou přitom přesně ty prvky, který chybí v oboru hodnot.*

Úlohy s iteracemi dovedou být dost různorodé a kromě výše uvedených pozorování nemáme moc silnější zbraně. Časté postupy a nástroje zahrnují:

- *prostost a bijektivita*: Pokud dokážeme, že je funkce prostá či bijektivní, značně to zjednoduší obrázek. Následně už lze zvlášť pracovat s cykly a řetězy.
- *extremální princip*: Na cyklech se může vyplatit podívat se na největší nebo nejmenší prvek. Stejně tak může někdy pomoci minimální prvek oboru hodnot. Obecněji má každá podmnožina $\mathbb{N}$ minimum.
- *pořadí a vzdálenost*: Hodí se uvažovat o pořadí a vzdálenostech prvků na řetězu. Někdy se taky hodí porovnat to s pozicemi na číselné ose.
- *indukce*: Iterace často potkáme nad přirozenými čísly. Indukovat potom můžeme obyčejně podle argumentu, anebo třeba podle pořadí v cyklu či na řetězu.
- *funkcionálkové triky*: Funkcionálka s iterací je pořád funkcionálka. Chytré dosazení, úprava nebo symetrie mohou úlohu zpřehlednit.

Rozcvička I – procházky

Úloha 1. David na svých cestách zabloudil do země, kde je konečně mnoho silnic, každá z nich začíná a končí křižovatkou a každá křižovatka je tvaru Y. (Silnice mohou být klikaté a mimoúrovňově se křížit.) Řekl si, že by si ji rád prohlédl, ale trochu se obával, aby se tam úplně neztratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí z křižovatky u hospody Na mýtince a střídavě bude na křižovatkách odbočovat doleva a doprava. Může si být jistý tím, že se po nějakém čase ocitne opět u hospody Na mýtince?

(PraSe 35–4j–5)

Úloha 2. V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukažte, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném. (PraSe 35–1p–4)

Úloha 3. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.

(PraSe 34–1j–6)

Úloha 4. Na tabuli jsou v nějakém pořadí napsána čísla 1 až 2023 v řadě. V jednom kroku se podíváme na první číslo, nechť je to k, a obrátíme pořadí prvních k čísel – tedy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ přepíšeme na $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1$. Dokažte, že po konečném počtu kroků dostaneme na první pozici jedničku.

Rozcvička II – iterujeme jenom trochu

Úloha 5. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $f(f(n)) < f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (PraSe 36–4p–2)

Úloha 6. Je dána funkce $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zkonstruujte $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takovou, že $f^n(x) = 0$ má přesně $g(n)$ řešení pro každé $n \in \mathbb{N}$. (zobecněné PraSe 37–4p–3)

Úloha 7. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňují

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Úloha 8. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující $f(f(n)) = 3n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. (USAYNO)

Cykly

Úloha 9. Je dána bijekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Musí nutně existovat nekonečně mnoho funkcí $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(g(x)) = g(f(x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}$? (ELMO SL 2018)

Úloha 10. Najděte všechny bijekce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. (Rumunsko 2004)

Úloha 11. Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňuje
$$f^{f(n)}(n) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$
pro každé $n \in \mathbb{N}$. Určete všechny možné hodnoty $f(2020)$. (USAMO 2019)

Úloha 12. Nechť $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkce $f\colon S \to S$ je *krutopřísná*, pokud pro každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$. Dokažte, že každá krutopřísná funkce má alespoň $P + 1$ pevných bodů, kde P je počet prvočísel v intervalu $(\sqrt{n}, n\rangle$. (PraSe 36–4p–7)

Úloha 13. O reálném polynomu $f(x) = x^2 + ax - 1$ je známo, že rovnice $f^{47}(x) = x$ má alespoň 50 reálných řešení. Dokažte, že tato rovnice má alespoň 96 řešení. (Russia TST 2020)

Úloha 14. Funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme *žůžovou*, pokud
$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$$
pro každé $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna m taková, že každá žůžová funkce f splňuje $f^{2014}(m) = m$. (ELMO SL 2014)

Řetězy

Úloha 15. Jsou dána $a, k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f^k(n) = n + a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje, právě když $k \mid a$. Bonus: kolik takových funkcí existuje?

Úloha 16. Najděte všechna přirozená k, pro než existují funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že g nabývá nekonečně mnoha hodnot a $f^{g(n)}(n) = f(n) + k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (MEMO 2020 I1)

Úloha 17. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že
$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$
pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{N}$. (ELMO 2020)

Úloha 18. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které splňují $f(f(f(n))) = f(n + 1) + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. (ISL 2013)

Trocha teorie čísel

Úloha 19. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem
$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{pokud je } \sqrt{a_n} \text{ celé číslo,} \\ a_n + 3, & \text{jinak.} \end{cases}$$
Určete všechny hodnoty a_0, pro něž existuje číslo A takové, že $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n. (IMO 2017)

Úloha 20. Je dáno celé číslo a_1, z něhož je dále definována nekonečná posloupnost celých čísel předpisem $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pro každé přirozené n. Dokažte, že pro každé přirozené n je a_{n+1} nesoudělné s $2n + 1$. (iKS–11–N2)

Úloha 21. Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto: $a_1 = 1$ a pro každé přirozené k je $a_{k+1} = a_k^3 + 1$. Dokažte, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné, existuje přirozené n, že $p \mid a_n$. (MEMO 2018 T7)

Úloha 22. Určete největší přirozené $N < 2020$, pro něž existuje polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že $2020 \mid P^k(0)$, právě když $N \mid k$. Bonus: jak se odpověď změní, když místo 2020 napíšeme 2021? (USA EGMO TST 2020)

Úloha 23. Je dán nekonstantní polynom P s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že neexistuje funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je počet řešení $f^n(x) = x$ roven $P(n)$. (ISL 2009 N5)

Návody

1. Jako stavy Davidovy cesty ber třeba trojice (silnice, směr, parita).

2. Každá cesta se zacyklí – podívej se na cyklus.

3. Rozmysli si, že ve městě neexistují zatáčky, které zároveň nejsou křižovatky. Potom se zkus procházet uvnitř města.

4. Podívej se na cyklus a učiň extremální volbu.

5. Podívej se na cestu z libovolného n.

6. Prostě si nakresli stromeček.

7. Nahlédni prostost a poté indukuj.

8. Zkus si tipnout.

9. Rozděl komponenty souvislosti na oboustranné řetězy, pevné body a ostatní cykly.

10. Oboustranné řetězy vysporuj, v cyklech učiň extremální volbu.

11. Rozmysli si, že f musí být poskládána z dvojcyklů a pevných bodů.

12. Délky cyklů.

13. Kolik je cyklů délek 1 a 47?

14. Rozmysli si bijektivitu. Uvnitř cyklu indukuj proti směru šipek.

15. Kolik prvků se s každou aplikací f ztrácí z oboru hodnot?

16. Cesta z $f(n)$ navštíví skoro celou zbytkovou třídu $f(n)$ mod k. Buď najdi spor s neomezeností g, anebo zkus vhodně poskládat graf.

17. Řetěz z 1 musí obsahovat vše. S pomocí úlohy 15 si rozmysli $1 \mapsto 2 \mapsto 3$ a je vyhráno.

18. Porovnej f^4 na argumentech n a $n-1$, vyjde to hezky. Následně porovnávej, kolik prvků chybí v oborech hodnot f a f^3. Pak už si stačí rozmyslet pořadí prvních čtyř prvků na řetězu – jsou dvě možnosti, které fungují.

19. Rozmysli si modulo 3. Potom se dívej na minimum cyklu.

20. Iteruj $f(x) = x^2 - x + 1$ modulo $p \mid a_{n+1}$. Do jednoho vrcholu nemůže přicházet příliš mnoho šipek – ukaž, že $p > 2n + 1$.

21. Trik: $0^3 + 1 \equiv 1 \pmod p$.

22. Rozlož úlohu do $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_{101}$. Jak funguje délka cyklů při skládání zpět?

23. Pomocí délek cyklů něco řekni o $P(pq)$ pro prvočísla p, q.

Literatura a zdroje

Tento příspěvek je zkrácenou a mírně aktualizovanou druhou *iterací* přednášky, kterou jsem připravil na soustředění iKSka v roce 2021. Rád bych si zde proto poděkoval za to, jak skvěle jsem ji tehdy napsal a jak všeobecně úžasný a skromný jsem.

[1] Martin „Vodka“ Vodička: *Funkcionálky nad prirodzenými číslami*, sborník iKS, 2017.
[2] Vít „Vejtek“ Musil: *Funkcionální rovnice*, Oldřichov, 2012.
[3] Rado van Švarc: *Dvě neobvyklé existenční techniky*, Hojsova Stráž, 2016.