# Isogonal Conjugates

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. Isogonal conjugates a práce s nimi je oblíbené téma moderní eukleidovské geometrie. V příspěvku jsou popsána některá základní tvrzení, po kterých následuje několik úloh, které se isogonal conjugates buď zabývají, nebo je přímo využívají.

**Definice.** Nechť bod $P$ leží v rovině trojúhelníku $ABC$. Přímky $AP$, $BP$ a $CP$ zobrazíme podle os úhlů $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCA$. Pokud se tyto tři přímky protínají v jednom bodě $Q$, pak tento bod nazveme *isogonal conjugate* bodu $P$ vzhledem k $\triangle ABC$.

**Tvrzení.** *Pokud $P$ neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, pak vzhledem k $\triangle ABC$ má $P$ isogonal conjugate.*

**Tvrzení.** (Six feet theorem) *Nechť $P$ a $Q$ jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Nechť $P_a$ je projekce bodu $P$ na $BC$. Analogicky definujme $P_b$, $P_c$, $Q_a$, $Q_b$ a $Q_c$. Pak $P_a$, $P_b$, $P_c$, $Q_a$, $Q_b$ a $Q_c$ leží na jedné kružnici, jejíž střed splývá se středem $PQ$.*

**Úmluva.** Budeme používat *opsiště*, *vepsiště* a *připsiště* jako zkrácený pojem pro střed kružnice opsané, kružnice vepsané a kružnice připsané. Navíc budeme místo „ortocentrum“ používat pojem *kolmiště*.

**Úmluva.** Pokud nebude řečeno jinak, pak v trojúhelníku $ABC$ bude $I$, $O$ a $H$ označovat vepsiště, opsiště a kolmiště.

**Příklad.** V trojúhelníku $ABC$ je $I$ svůj vlastní isogonal conjugate. Dále pokud $E$ je $A$-připsiště, pak i ono je svým vlastním isogonal conjugate.

**Příklad.** Body $O$ a $H$ jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$.

**Tvrzení.** *V trojúhelníku $ABC$ označíme body dotyku kružnice vepsané s $BC$, $CA$, $AB$ jako $D$, $E$, $F$. Body dotyku kružnic připsaných se stranami $BC$, $CA$ a $AB$ si označíme jako $X$, $Y$, $Z$. Pak trojice přímek $AD$, $BE$ a $CF$ se protíná v jednom bodě a stejně tak i trojice přímek $AX$, $BY$, $CZ$.*

**Definice.** Ve výše použitém značení se průsečík $AD$, $BE$ a $CF$ nazývá *Gergonnův bod*. Pro průsečík $AX$, $BY$, $CZ$ se používá označení *Nagelův bod*.

**Příklad.** Nechť $H^-$ je střed záporné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom $H^-$ je isogonal conjugate Gergonnova bodu.

**Příklad.** Nechť $H^+$ je střed kladné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Potom $H^+$ je isogonal conjugate Nagelova bodu.

**Příklad.** (Brocardovy body) Uvnitř $\triangle ABC$ leží dvojice bodů $P$ a $Q$ tak, že

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi \quad \text{a} \quad \sphericalangle QBA = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QAC = \phi.$$

Potom tyto dva body jsou isogonal conjugates.

## OH, oni jsou kamarádi!

**Úloha 1.** V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ si označme průsečík úhlopříček jako $P$. Dále si označme opsiště čtyřúhelníku $ABCD$ jako $O$ a opsiště trojúhelníků $APB$, $BPC$, $CPD$ a $DPA$ jako $O_1$, $O_2$, $O_3$ a $O_4$. Ukažte, že přímky $PO$, $O_1O_3$ a $O_2O_4$ se protínají v jednom bodě. (Čína 1990)

**Úloha 2.** Ukažte, že rovnost $|IH| = |IO|$ platí právě tehdy, když jeden z úhlů trojúhelníku je roven $60°$.

**Úloha 3.** V $\triangle ABC$ osa úsečky $BH$ protíná strany $AB$ a $BC$ v bodech $D$ a $E$. Ukažte, že $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE$. (Crux)

**Úloha 4.** V $\triangle ABC$ leží body $D$ a $E$ na stranách $AB$ a $BC$ tak, že čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový. Kružnice opsaná $\triangle DBE$ protne stranu $AC$ ve dvou bodech $X$ a $Y$. Nechť $M$ je střed $XY$. Ukažte, že $BM \perp AC$. (Baltic Way 2010)

**Úloha 5.** Kružnice $k_1$ a $k_2$ se středy $I_1$ a $I_2$ se protínají ve dvou bodech $A$ a $B$. Nechť je úhel $I_1AI_2$ tupý. Tečna ke $k_1$ v bodě $A$ protíná $k_2$ ještě v bodě $C$ a tečna ke $k_2$ v bodě $A$ protíná $k_1$ ještě v bodě $D$. Označme $k_3$ kružnici opsanou trojúhelníku $BCD$. Nechť $E$ je střed toho oblouku $CD$ kružnice $k_3$, který obsahuje bod $B$. Přímky $AC$ a $AD$ protínají $k_3$ po řadě ještě v bodech $K$ a $L$. Dokažte, že přímky $AE$ a $KL$ jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

## Další hrátky s isogonal conjugates

**Úloha 6.** Elipsa s ohnisky $P$ a $Q$ se dotýká stran $\triangle ABC$. Ukažte, že $P$ a $Q$ jsou isogonal conjugates.

**Úloha 7.** V rovině trojúhelníku $ABC$ leží kružnice $k$ se středem $X$. Tato kružnice protíná stranu $AC$ v bodech $B_1$ a $B_2$. Kružnici nad průměrem $B_1B_2$ nazveme $k_b$. Analogicky vytvoříme kružnice $k_a$ a $k_c$. Potenční střed $k_a$, $k_b$ a $k_c$ označme jako $Y$. Ukažte, že $X$ a $Y$ jsou isogonal conjugates. (zobecněné IMO 2008)

**Úloha 8.** (General Feuerbach Theorem) Body $P$ a $Q$ jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ a přitom platí, že $P$, $Q$ a $O$ leží na přímce. Ukažte, že kružnice opsaná projekcím bodů $P$ a $Q$ na strany trojúhelníku se dotýká kružnice devíti bodů.

**Úloha 9.** Nechť $P$ a $Q$ jsou isogonal conjugates v $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou $\Omega$. Průsečík $BP$ s $\Omega$ různý od $B$ označme $D$. Přímka $DO$ protne $AC$ a $\Omega$ v $M$ a $N$. Pokud $BA < BC$, ukažte, že $\sphericalangle AMP = \sphericalangle QNB$. (Zobecněné Rusko 2005)

## A je taková hloupost vůbec k něčemu?

**Úloha 10.** Uvnitř trojúhelníku $ABC$ je dán bod $P$. Nechť $A'$, $B'$, $C'$ jsou paty kolmic z $P$ na příslušné strany. Kružnice opsaná $\triangle A'B'C'$ protíná stranu $BC$ podruhé v bodě $A''$. Na úsečce $A''B'$ nalezneme bod $X$ takový, že $\sphericalangle XAC = \sphericalangle PAB$. Ukažte, že $\sphericalangle AXB = 90°$. (*i*KS 1 – G3)

**Úloha 11.** Je dán úhel o velikosti $\alpha$ s hlavním vrcholem $A$ sevřený mezi polopřímkami $u_1$ a $u_2$ vycházejícími z $A$. Uvnitř úhlu $u_1u_2$ je dán bod $B$ neležící na jeho ose a je dána velikost úhlu $\beta$, kde $\alpha < \beta < 180°$. Uvažme všechny možné dvojice bodů $X$, $Y$ takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, $A$ leží mimo úhel $XBY$ a $\sphericalangle XBY = \beta$. Pak každý z bodů $A$, $B$ má tu vlastnost, že vidí úsečku $XY$ stále pod stejným úhlem. Ukažte, že existuje třetí bod s touto vlastností. (*i*KS 4 – G6)

**Úloha 12.** Je dán trojúhelník $ABC$ a jeho kružnice opsaná. Bod $P$ je středem oblouku $BAC$. Kružnice nad průměrem $CP$ protíná osu úhlu $BAC$ v bodech $K$ a $L$, kde $AK < AL$. Bod $M$ je obrazem bodu $L$ v osové souměrnosti podle přímky $BC$. Ukažte, že kružnice opsaná trojúhelníku $BKM$ prochází středem $BC$. (ČPS 2013)

**Úloha 13.** V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že přímka $BD$ nepůlí ani úhel $\sphericalangle ABC$, ani $\sphericalangle CDA$. Bod $P$ ležící uvnitř $ABCD$ splňuje $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA$ a $\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $AP = CP$. (IMO 2004)

## Návody

**1.** Díky isogonálnosti $O$ s $H$ a tětivovosti $ABCD$ je $O_1P \perp CD$ a analogicky pro ostatní, z čehož plyne, že $O_1PO_3O$ a $O_2PO_3O$ jsou rovnoběžníky.

**2.** Buď je $\triangle BIH \cong \triangle BIO$, nebo je $BOIH$ tětivový čtyřúhelník.

**3.** Ukažte $\triangle BOC \sim \triangle BDH$ a použijte spirální podobnost.

**4.** Pokud $S$ je opsiště $\triangle BDE$, pak $BS \perp AC$.

**5.** Vyúhlete, že $E$ je opsiště $\triangle ACD$.

**6.** Pokud se elipsa dotýká $AC$ v $D$, pak $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QDC$. Překlopte $Q$ podle stran.

**7.** Dokreslete středy $k_a$, $k_b$ a $k_c$. Chordála je kolmá na jejich spojnici. Střed $k$ leží na osách $B_1B_2$ a dalších dvou analogických osách.

**8.** Nechť $PQ$ protíná kružnici opsanou $\triangle ABC$ v $X$ a $Y$. Pak Simsonovy přímky $X$ a $Y$ jsou na sebe kolmé a protínají se právě v našem bodě dotyku.

**9.** Dokreslete $D' \in \Omega$ tak, že $DD' \parallel AC$. S trochou úhlení dostaneme $\triangle PAD \sim \triangle AQD'$. Potom dostaneme $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$ a $\triangle AMD \sim \triangle NAD'$.

**10.** Dokreslete isogonal conjugate k $P$ a použijte six feet theorem. Doúhlete.

**11.** Ten bod je isogonal conjugate k $B$ vzhledem k (libovolnému) trojúhelníku $XAY$. Na dokázání toho, že je to pro všechny ten samý bod, použijte definici isogonal conjugate jako střed kružnice opsané obrazům přes strany.

**12.** Ukažte, že $K$ a $L$ jsou isogonal conjugates a doúhlete.

**13.** Body $A$ a $C$ jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle BPD$.

## Zdroje

Jako primární zdroj bych rád označil příspěvek od Michala „Kennyho“ Rolínka, kterému bych tímto chtěl poděkovat.

[1] Michal Rolínek: *Antirovnoběžnost*

[2] András Hraskó: *The Isogonal Conjugate*

[3] Yufei Zhao: *Lemmas in Euclidean Geometry*

[4] Tran Quang Hung, Pham Huy Hoang: *Generalization of a Problem with Isogonal Conjugeta Points*

[5] *www.artofproblemsolving.com*