Řešení úloh pomocí invariantů

Robert Šámal

Archimédes prý říkal „Dejte mi pevný bod a pohnu Zeměkoulí!“ Budeme se jím inspirovat a vyzkoušíme následující postup řešení matematických úloh. Pokud zadání popisuje nějaký proces, něco, co se opakuje, mění, hledejme něco, co zůstává stejné, neměnné. Tomu, co nalezneme, říkejme invariant. To bude náš pevný bod, Zeměkoulí sice jeho pomocí nepohneme, zato třeba pohneme několika těžkými úložkami.

Naše základní strategie tedy říká: **Kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné.** Příbuzná myšlenka je hledat něco, co se sice mění, ale kontrolovaným způsobem (např. nějaké číslo stále roste). Také není vždy nutné, aby nějaký opakovaný proces byl uveden v zadání, občas je vhodné si takový proces přimyslet. Uveďme si ještě několik invariantů, které jsou často užitečné.

(1) součet čísel, případně součet modulo n (pro vhodné n).
(2) součet druhých mocnin (geometricky vzdálenost od počátku).
(3) další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců rozdílů, …
(4) počet nějakých jevů, případně modulo n.

Úlohy

1. Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, … , $2n$ (n je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla a, b a místo nich napsat $|a-b|$. Toto opakujeme. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.
2. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?
3. Na zájezdě má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte.
4. Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a,b,c,d) čtveřicí $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než milion.
5. Nechť $0 < x_0 < y_0$. Vyjádřete vzorcem x_n, y_n definované rekurentními vztahy:
$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}\,, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}\,.$$
6. Každé z čísel a_1, … , a_n je $+1$ nebo -1 a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

7. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, každý z nich má nanejvýš $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.
8. * Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x+y$, $-y$, $y+z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (Řešte i pro reálná čísla.)
9. Začněme s nějakou čtveřicí celých čísel (varianta: reálných čísel) (a,b,c,d). Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a,b,c,d) čtveřicí $(|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)$. Dostaneme se vždy ke čtveřici $(0,0,0,0)$?
10. Začněme s čísly 1, 2, ..., $4n-1$. V jednom tahu nahradíme dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že po $4n-2$ tazích zbyde sudé číslo.
11. Mějme množinu $\{3,4,12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a-0.8b$ a $0.8a+0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4,6,12\}$ nebo (b) $\{x,y,z\}$ kde $|x-4|,|y-6|,|z-12| < 1/\sqrt{3}$?
12. Vezmeme šachovnici s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku 2×2 políčka. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?
13. * Mějme čísla a, b kladná celá. Dokud je $a > 0$ opakujeme následující operaci: pokud je $a < b$, dosadíme místo (a,b) dvojici $(2a, b-a)$, jinak místo (a,b) dosadíme $(a-b, 2b)$. Pro které výchozí dvojice postup skončí? Po kolika krocích? Co můžete říci o periodách v nekonečném procesu? Řešte i pro kladná reálná a, b.
14. Máme modré, červené a zelené korálky. V jednom tahu smíme provést výhodnou výměnu: zahodíme dva korálky, každý jiné barvy a dostaneme za ně korálek barvy třetí. Kdy můžeme tímto postupem skončit s jediným korálkem? Záleží barva zbylého korálku na zvoleném postupu?
15. Opět máme modré, červené a zelené korálky, tentokrát za zahození dvou korálků různých barev dostaneme dva korálky barvy třetí. Kdy je možno docílit toho, že všechny korálky budou mít tutéž barvu?
16. V každém políčku obdélníkové tabulky je napsáno celé kladné číslo. V každém tahu je možno zmenšit všechna čísla v jednom sloupci o jedna nebo zdvojnásobit všechna čísla v jedné řadě. Dokažte, že je možno dosáhnout tabulky se samými nulami.
17. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček nebo dvojek?
18. Vrcholy mnohoúhelníku jsou označeny reálnými čísly. Pokud nějaká čtveřice po sobě jdoucích čísel a, b, c, d splňuje vztah $(a-d)(b-c) < 0$, smíme prohodit b a c. Můžeme toto prohození provést nekonečněkrát?
19. Na políčku b1 šachovnice je napsáno -1, na ostatních $+1$. Máme možnost změnit znaménko čísel v jednom sloupci, jedné řadě nebo na libovolné diagonále (včetně

jednopolíčkových diagonál, tj. rohových políček). Dokažte, že nám vždy zbyde nějaká -1.

20. Mějme řadu 2000 čísel. Do druhé řady pod každé číslo napíšeme počet jeho opakování v řadě první. Stejně vytvoříme z druhé řady řadu třetí atd. Dokažte, že jednou budou dvě po sobě jdoucí řady stejné.
21. Na každém políčku šachovnice je celé číslo, smíme přičíst jedničku ke všem číslům nějakého čtverce 4×4 nebo 3×3 políčka. Můžeme opakováním této operace docílit toho, aby byla všechna čísla na šachovnici dělitelná (a) dvěma, (b) třemi?
22. Z čísla 11^{2000} vyškrtneme první číslici a přičteme ji ke zbylému číslu. Tuto operaci opakujeme, dokud nezískáme deseticiferné číslo. Ukažte, že dvě z jeho cifer budou stejné.
23. * Na políčku $(1,1)$ stojí věž. Jedním tahem smíme buď zdvojnásobit jednu souřadnici, nebo odečíst menší souřadnici od větší. Na která políčka se věž může dostat?
24. * Mějme posloupnost začínající $1,0,1,0,1,0,\ldots$ jejíž další členy získáme jako součet předchozích šesti modulo 10. Vyskytne se v této posloupnosti šestice $\ldots,0,1,0,1,0,1,\ldots$?
25. * Vezmeme 35 celých čísel. Můžeme vybrat nějakých 13 z nich a zvětšit každé z těchto třinácti o 1. Ukažte, že můžeme docílit toho, že všech 35 čísel bude stejných. Prozkoumejte i zobecnění — pro n čísel, z nichž je možno volit m.
26. Čísla 1, 2, … , $2n$ jsou seřazena v libovolném pořadí. Ke každému číslu přičteme jeho pořadové číslo. Dokažte, že dostaneme dvě čísla se stejným zbytkem modulo $2n$.
27. V kruhu je rozmístěno n důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?
28. * Na každý mřížový bod (x,y) pro $y \le 0$ můžeme položit dámový kámen. Pak s těmito kameny zacházíme jako při solitéru: vybereme dva kameny sousedící vodorovně nebo svisle a jedním přeskočíme druhý (ten druhý zahodíme) a dopadneme na volné políčko. Tímto postupem chceme dostat nějaký kámen na políčko $(0,n)$ pro co největší n.
29. * Čísla 1, 2, … , n jsou libovolně uspořádána. V jednom kroku můžeme dvě sousední čísla (varianta: dvě libovolná čísla) prohodit. Můžeme po lichém počtu kroků dojít k výchozímu uspořádání?
30. * Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?