Invarianty

Marek Tesař

Invarianty? Čo to je? Dá sa to jesť?

Takže pre tých, čo sa s takýmto čudným slovom ešte nikdy nestretli, tak invariant je niečo stále, niečo čo sa nemení. Pre lepšiu predstavu si to ukážme na príklade:

Úloha. Majme postupnosť $a_1 = 2, a_2 = 8$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$ pre $n \in \mathbb{N}$. Zistite či existujú $i, j, k \in \mathbb{N}$, že $a_i.a_j = a_k$.

No a ako to dokážeme? Tak keď si vypíšeme zopár prvých členov a budeme sa na ne chvíľu pozerať, tak si môžeme všimnúť, že každý člen našej postupnosti dáva po delení tromi zvyšok 2. No ale potom súčin ľubovolných dvoch členov musí dávať zvyšok 1 modulo 3 a teda také indexy i, j, k nemôžu existovať (ináč by sme mali prirodzené číslo, ktoré po delení tromi dávalo zvyšok jedna aj dva). No a to, že každý člen dáva po delení tromi zvyšok 2 to sa volá invariant (pretože sa to nemení, vždy to tak je a jednoducho sa to ukáže indukciou). Keby sme si tento pojem chceli velmi neformálne definovať, tak by sme dostali asi niečo takéto.

Definícia. *Invariantom budeme rozumieť niečo, čo sa nemení a v každom kroku je to rovnaké.*

A k čomu to je vlastne dobré?

Pomocou invariantov sa dá niekedy veľmi ľahko dokázať, že daná úloha nemá riešenie (samozrejme nie vždy, niekedy naopak môže pomôcť k nájdeniu hľadaného riešenia). Táto metóda sa veľmi často používa pri príkladoch s postupnosťami a tam, kde sa spomína nejaká šachovnica. Samozrejme na to aby sme mohli túto metódu použiť, potrebujeme aby sa v príklade niečo „dialo“, t.j. aby tam boli nejaké „kroky“ a my ukážeme, že v každom kroku platí náš invariant (v prípade postupnosti sme ukazovali, že to platí pre každý člen, čo si vieme predstaviť, ako keby sme v každom kroku vyrobili nový člen postupnosti podľa daného predpisu). Jedna z najznámejších úloh, kde sa táto metóda používa je:

Úloha. Dá sa preskákať so šachovým koňom cez všetky políčka šachovnice, tak aby sme začali v ľavom dolnom rohu a skončili v pravom hornom a aby sme každé políčko navštívili práve raz?

No a odpoveď znie: „NIE". Uvažujme normálne ofarbenie šachovnice, t.j. políčka sú striedavo bielo-čierne a ľavé dolné políčko je čierne (potom aj pravé horné musí byť čierne). Máme 64 políčok a keby existovala postupnosť krokov pre našeho koníka taká, že by každé políčko navštívila práve raz a skončila v pravo hore, tak je zrejmé, že táto postupnosť by musela obsahovať 63 krokov (skokov). Lenže ľahko nahliadneme, že pri každom skoku sa náš koník bude nachádzať na políčku s inou farbou, takže po 63. skoku sa bude musieť nutne nachádzať na bielom políčku, čo je spor s tým, že má byť na pravom hornom políčku.

Poznámka. Nie vždy je náš invariant zrejmý na prvý pohľad, preto by sme sa mali pri jeho hľadaní držať niekoľkých (takých zakladných) pravidiel:

- majte oči otvorené a všímajte si aj maličkosti
- vypisujte si prvé členy, prípadne prvé kroky (niekedy ich treba dosť veľa)
- keď si niečo všimnete nezabudnite to dokázať
- často ide o paritu alebo o nejakú zvyškovú triedu modulo nejaké číslo (ako ukazuje úvodná úloha)
- pri úlohách s tabuľkami (šachovnicami) skúšajte rôzne ofarbenia
- pomocou invariantov sa ukazuje najmä, že úloha NEMÁ riešenie takže ak sa nedarí nájsť vhodný invariant, môže to znamenať, že úloha má riešenie
- vhodný invariant môže napomôcť k nájdeniu riešenia
- majte oči otvorené a všímajte si maličkosti

No a na prednáške si na príkladoch ukážeme ako sa také invarianty hľadajú. No a keby niekto do vtedy nevedel vydržať, tak tu je zopár príkladíkov, ktoré si môžete preriešiť a keby ste sa dopracovali k nejakým výsledkom tak sa s ním môžete pochváliť na niektorom z nábojov.

Príklad 1. Na každom políčku tabuľky 1997x1997 je buď $+1$ alebo -1. Pre každý riadok spočítajme súčin R_i všetkých čísiel v tomto riadku a analogicky S_i nech je súčin v stĺpci. Dokážte, že $\sum_{i=1}^{1997}(R_i + S_i)$ nikdy nie je nulová.

Príklad 2. V každom vrchole štvorca máme jeden kamienok a v každom kroku môžeme previesť nasledujúcu operáciu: z ľubovolného vrchola zoberieme niekoľko kamienkov (najviac toľko koľko tam bolo na začiatku) a pridáme dvakrát viac kamienkov na niektorý zo susedných vrcholov. Je to možné robiť tak, aby sme na konci vo vrcholch dostali (zaradom) 1989, 1988, 1990 a 1989 kamienkov?

Príklad 3. Vo vrcholoch pravidelného n-uholníka, $n \geq 4$, sú vpísané čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n. Nech a, b, c, d sú štyri za sebou idúce takéto čísla. Potom ak $(a-d)(b-c) < 0$, tak môžeme vymeniť hodnotu b a c. Zistite, či túto operáciu môžeme robiť do nekonečna.